

VIII CONVEGNO DI.FI.MA. &
VII GEOGEBRA DAY
Matematica e fisica nelle istituzioni:
curriculum, valutazione, sperimentazione

Visualizzazione in geometria e software di geometria dinamica

Mirko Maracci

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

mirko.maracci@unipv.it

18 ottobre 2017



Perché usare software di geometria dinamica?

Risposte «frequenti»

- ... per facilitare la visualizzazione di ...
- ... per visualizzare meglio ...



Con quale obiettivo? Educare (al)la visualizzazione è un obiettivo in sé? È educabile? È rilevante?

In che senso e in che modo un software facilita la visualizzazione (di cosa?) ?

Visualizzazione, in quali ambiti?

Perché usare software di geometria dinamica?

Risposte «frequenti»

- ... per facilitare la visualizzazione di ...
- ... per visualizzare meglio ...

Con quale obiettivo? Educare? ...
È un obiettivo in sé? È ... ante?

In che senso? ... un software facilita la
... (di cosa?) ?

Visualizzazione, in quali ambiti?

Cosa si intende per visualizzazione?



Cosa si intende per **visualizzazione**?

Visualization is the **ability**, the **process** and the **product** of **creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams**, in our **minds**, on **paper** or with **technological tools**, with the purpose of **depicting** and **communicating** information, **thinking** about and **developing** previously unknown **ideas** and **advancing understandings**.

(Arcavi, 2003)



Cosa si intende per **visualizzazione**?

Visualization is the **ability**, the **process** and the **product** of **creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams**, in our **minds**, on **paper** or with **technological tools**, with the purpose of **depicting** and **communicating** information, **thinking** about and **developing** previously unknown **ideas** and **advancing understandings**.



Dimensione
esterna/interna



Funzionale...



Non solo in
geometria



Il valore della visualizzazione in matematica

“Visual thinking, thinking that involves visual imagination or visual perception of external diagrams, is widespread in mathematics, across levels, across subjects, and across kinds of mathematical activity.”

(Giaquinto, 2007)

“Possible epistemic roles include contributions to evidence, proof, discovery, understanding and grasp of concepts.”

(Giaquinto, 2015)

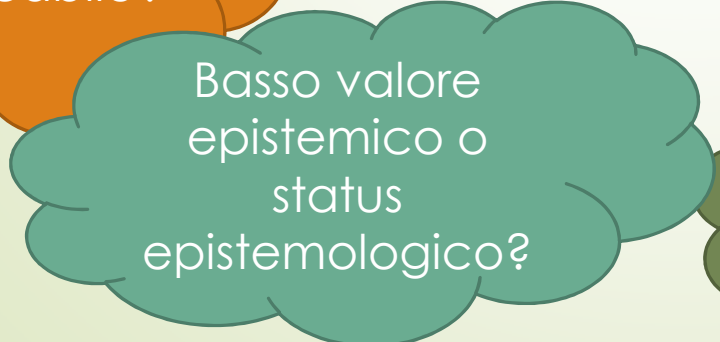


«Visualizzazione» come obiettivo educativo


- «Assi culturali» (2007)
- Indicazioni nazionali per i Licei (2010)
- Linee guida Ist Tec e Prof (2010, 2012)
- Indicazioni nazionali per il I ciclo (2012)
- Quadro di Riferimento INVALSI (2010)




Non educabile?



Basso valore epistemico o status epistemologico?



Mancanza di una chiara definizione?



Articolato e declinato in componenti più semplici?



«Visualizzazione» come obiettivo educativo

► NCTM Principles&Standards (2000)

“Instructional programs should enable all learners to:

- ...
- *use visualization, spatial reasoning, and geometric modeling to solve problems*
- ...”

- draw geometric objects with specified properties, such as side lengths or angle measures;
- use two-dimensional representations of three-dimensional objects to visualize and solve problems such as those involving surface area and volume;
- use visual tools such as networks to represent and solve problems;
- use geometric models to represent and explain numerical and algebraic relationships;
- recognize and apply geometric ideas and relationships in areas outside the mathematics classroom, such as art, science, and everyday life.

- draw and construct representations of two- and three-dimensional geometric objects using a variety of tools;
- visualize three-dimensional objects from different perspectives and analyze their cross sections;
- use vertex-edge graphs to model and solve problems;
- use geometric models to gain insights into, and answer questions in, other areas of mathematics;
- use geometric ideas to solve problems in, and gain insights into, other disciplines and other areas of interest such as art and architecture.



Cosa si intende per **visualizzazione in geometria?**

Visualization is the **ability**, the **process** and the **product** of **creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams**, in our **minds**, on **paper** or with **technological tools**, with the purpose of **depicting** and **communicating** information, **thinking** about and **developing** previously unknown **ideas** and **advancing understandings**.

(Arcavi, 2003)

Visualizzazione in geometria

Visualization is the **ability**, the **process** and the **product** of **creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams** in our **minds**, on **paper** or with **technological tools**, with the purpose of **depicting** and **communicating** information, **thinking** about and **developing** previously unknown **ideas** and **advancing understandings**.

(Arcavi, 2003)

Riferiti(bili) all'ambito
geometrico



Vi

Ruolo del disegno:

- Organizzare e riorganizzare graficamente proprietà geometriche
- Mettere in evidenza relazioni grafiche che possono corrispondere a proprietà geometriche

Visualiz

of **creation, interpretation, use of and reflection upon**

pictures, images, diagrams in our **minds**, on **paper** or

with **technological tools**, with the purpose of **depicting**

and **communicating** information, **thinking** about and

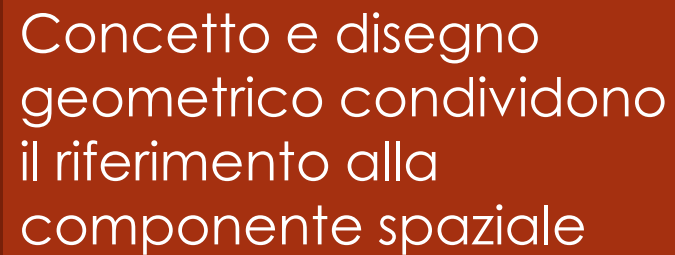
developing previously unknown **ideas** and **advancing**
understandings.

(Arcavi, 2003)

Riferiti(bili) all'ambito
geometrico



Disegni, figure, concetti geometrici,...



Concetto e disegno geometrico condividono il riferimento alla componente spaziale



Concetto geometrico: entità astratta definita in rapporto ad altre all'interno di un sistema. Elemento di una **teoria** che **coglie e formalizza alcuni aspetti propri delle relazioni spaziali.**

Disegno geometrico: sistema di **tratti grafici organizzati spazialmente** che rappresenta un concetto geometrico (è una rappresentazione speciale)



I rapporti tra disegno e oggetto geometrico

I processi di rappresentazione e interpretazione non sono spontanei e immediati.

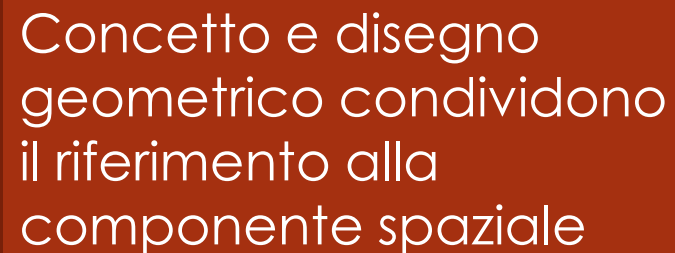
- ▶ Caratteristiche «intrinseche» del disegno
 - ▶ **Dominio di funzionamento:** Insieme delle proprietà geometriche rappresentate dalle proprietà spaziali del disegno
 - ▶ **Dominio di interpretazione:** Insieme delle proprietà spaziali del disegno che rappresentano proprietà geometriche

(Laborde, 1992)

- ▶ Conoscenze «geometriche» e «non-geometriche» del soggetto che produce o interpreta un disegno
- ▶ «Contesto» in cui il disegno è prodotto o interpretato: esigenze e scopi per cui è utilizzato



Disegni, figure, concetti geometrici,...



Concetto e disegno geometrico condividono il riferimento alla componente spaziale



Concetto geometrico: entità astratta definita in rapporto ad altre all'interno di un sistema. Elemento di una **teoria** che **coglie e formalizza alcuni aspetti propri delle relazioni spaziali.**

Disegno geometrico: sistema di **tratti grafici organizzati spazialmente** che rappresenta un concetto geometrico (è una rappresentazione speciale)



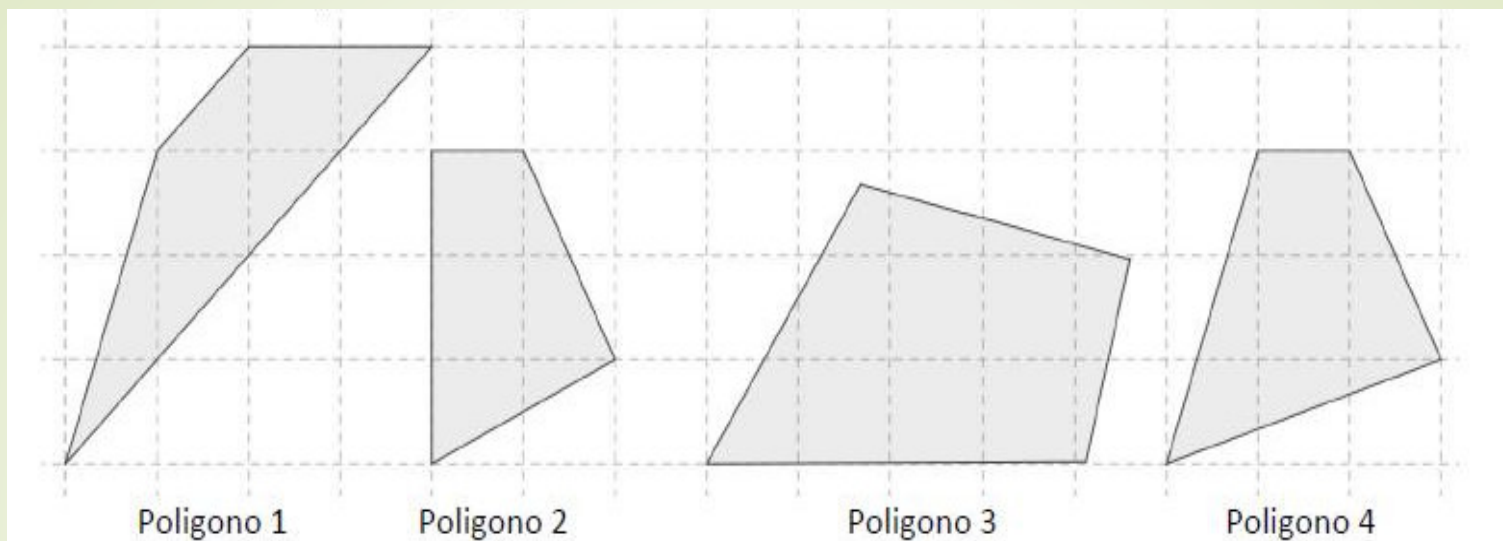
«Concetti figurali»

«un **misto di due entità** definite ed indipendenti, ovvero da un lato idee astratte (concetti), dall'altro rappresentazioni sensoriali»

(Fischbein, 1993)

«Nel ragionare in geometria gli oggetti in gioco, le figure geometriche, sono caratterizzate da una **duplice natura**, ad un tempo logica e spaziale, simultaneamente concettuale e figurale.»

(Mariotti, 1992)

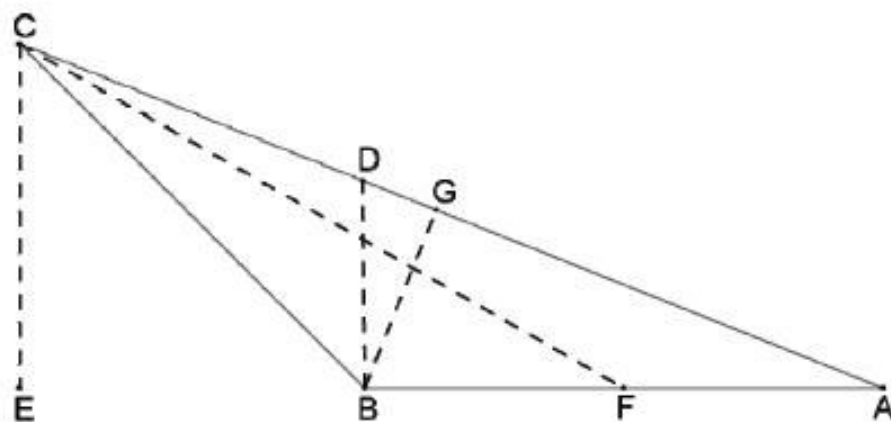


Quale di questi poligoni è un trapezio?

- A. Il poligono 1 43,1%
- B. Il poligono 2 5,9%
- C. Il poligono 3 16,1%
- D. Il poligono 4 34,1%

Prova INVALSI 2011 – grade 5

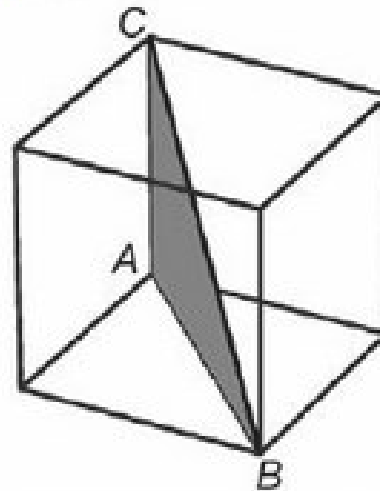
D15. Osserva la figura.



Quale, tra le seguenti coppie di segmenti, rappresenta due delle altezze del triangolo ABC?

- | | | | |
|----|--------------------------|---------|-------|
| A. | <input type="checkbox"/> | CE e CF | 28% |
| B. | <input type="checkbox"/> | BD e BG | 18,5% |
| C. | <input type="checkbox"/> | CE e BG | 34,8% |
| D. | <input type="checkbox"/> | CF e BD | 15% |

D9. Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.



		Vera	Falsa
a1.	Il lato AB è uguale al lato AC	53.3%	45.4%
a2.	Il triangolo ABC è rettangolo	71.7%	26.5%
a3.	Il lato BC è il più lungo dei tre	86.9%	11.8%
a4.	L'angolo ABC è di 45°	51.4%	44.6%




«Concetti figurali»

«un **misto di due entità**
un lato ide
senza

Perché la **visualizzazione geometrica** sia **efficace**,
assolva cioè le finalità descritte occorre che si
realizzi un' **armonia** tra componente figurale e
componente concettuale.

Cioè il processo di elaborazione, uso,
interpretazione di «immagini» deve realizzarsi in una
continua dialettica con la **componente**
concettuale.

(Mariotti, 1992)




«Concetti figurali» e ragionamento geometrico

Componente figurale e componente concettuale:

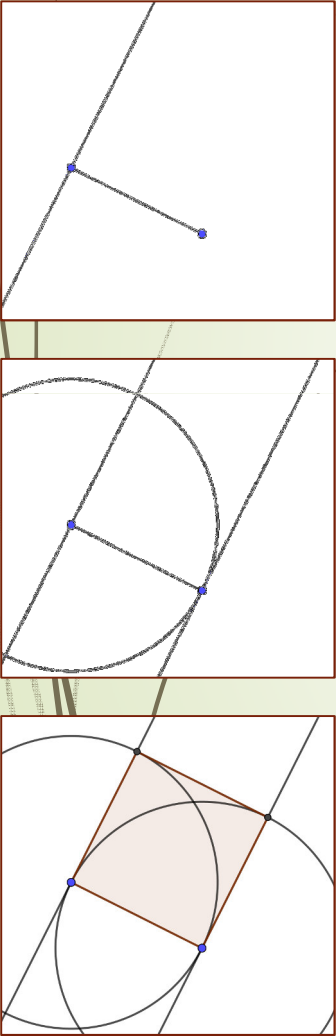
- disarmonie,
- tensioni,
- conflitti

possono determinare errori e difficoltà.

- È possibile promuovere lo sviluppo armonioso tra queste due componenti?
- Come? **Quale ruolo per le tecnologie?**



Esplicitazione:
primo passo per la **presa di
consapevolezza** delle relazioni in gioco

- 
- La produzione di un disegno può essere descritta come una **sequenza di azioni organizzate secondo relazioni temporali, spaziali e logiche.**
 - Una costruzione in un AGD richiede **l'esplicitazione** di tale sequenza, che non è più "solo" realizzata ma è comunicata al sistema attraverso l'uso di **comandi.**

I comandi hanno una propria sintassi che dirige **l'attenzione verso elementi e relazioni tra essi interpretabili in termini geometrici**

Disegno e trascinamento in un AGD

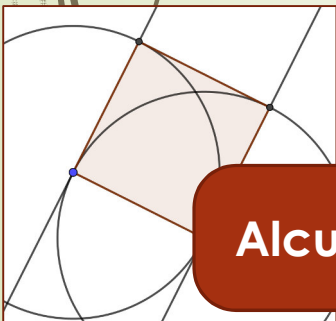
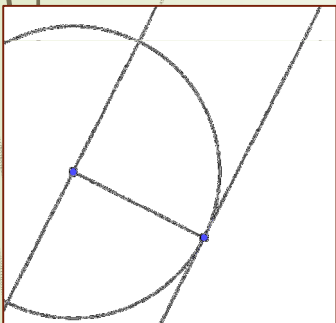
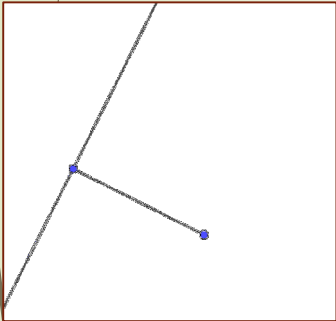
► La produzione di un disegno può essere descritta organizzata secondo una procedura.

Il trascinamento modifica il disegno preservando alcune relazioni spaziali

definiti in un sistema alla procedura:

- Elementi di base
 - Elementi costruiti 1
 - Elementi costruiti 2
 - Ecc.

Alcuni elementi del disegno possono essere **trascinati**, ma **non tutti**





Disegno e trascinamento in un AGD

Il trascinamento modifica il disegno preservando alcune relazioni spaziali

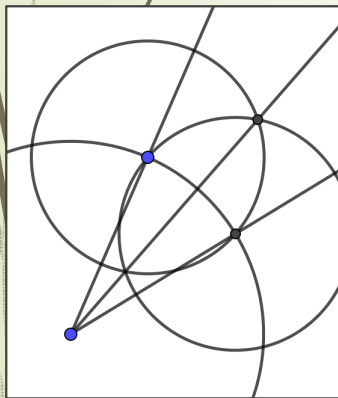
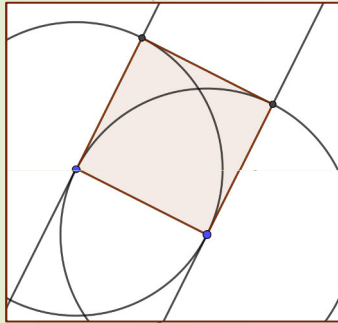
- Vengono preservate le **relazioni spaziali** tra gli elementi del disegno **definite nella costruzione** attraverso l'uso dei comandi
- Vengono preservate le **relazioni spaziali** tra gli elementi del disegno che sono **conseguenza** di quelle definite attraverso l'uso dei comandi.

Proprietà geometriche che «definiscono la figura»

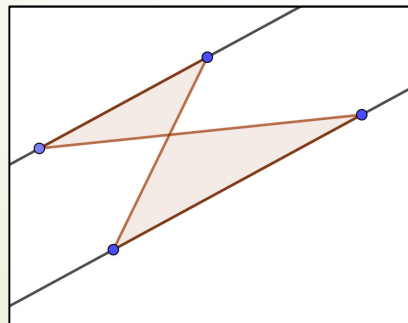
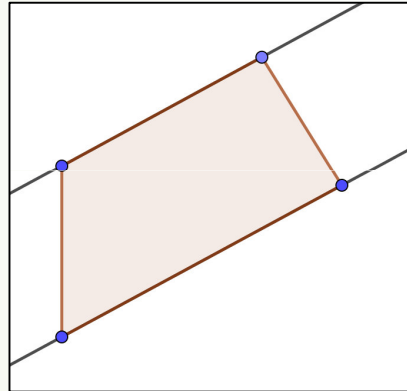
Proprietà geometriche che sono conseguenza di quelle «definiscono la figura»

Attività in un AGD

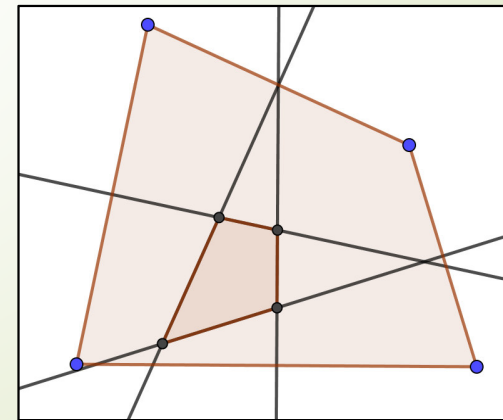
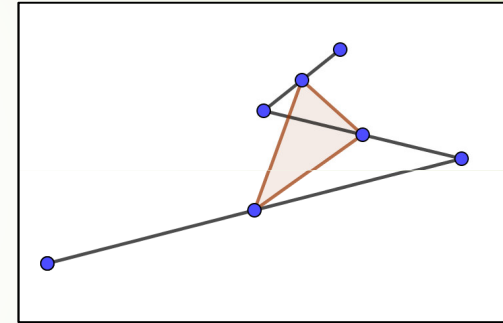
➤ Costruzioni geometriche

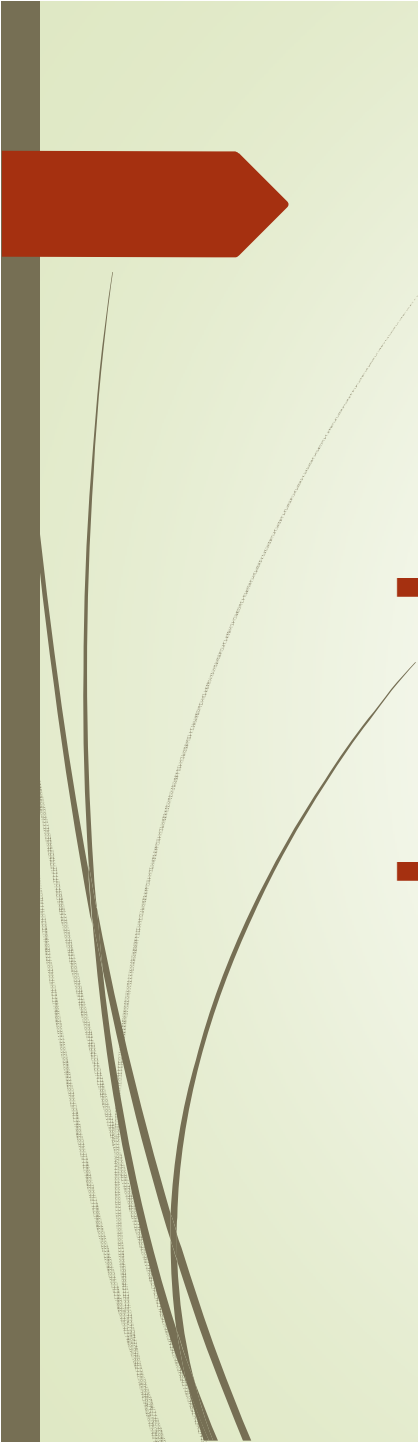


➤ Definizioni



➤ Esplorazione di configurazioni e formulazione di congetture





Disegni in un AGD e «concetti figurali»

- ▶ I disegni costruibili con un AGD, lo sono mediante **comandi che evocano (coerenti con) oggetti e relazioni proprie della geometria.**
- ▶ I disegni in un AGD possiedono una **logica sottostante** che coincide con la logica della loro costruzione

Disegni in un AGD e «concetti figurali»

Nel quadro generale della teoria dei concetti figurali ciò significa che **sia la componente figurale che quella concettuale sono contemporaneamente evocate** in ogni figura in un AGD
(Mariotti, 1996)

mediante
getti e

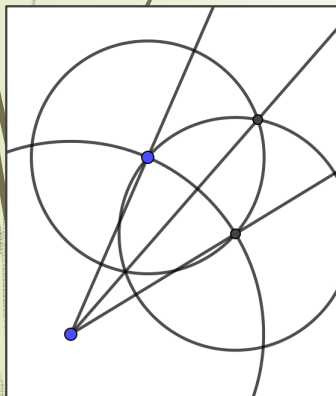
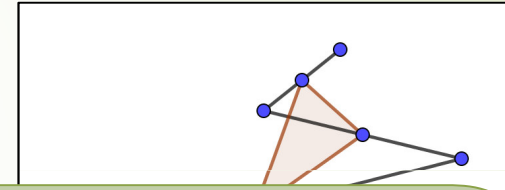
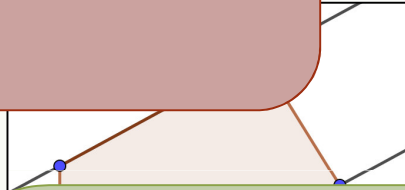
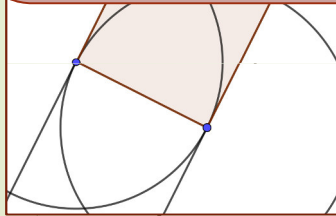
...presiedono una **logica sottostante**
...con la logica della loro costruzione

comprendere e lavorare secondo questa logica costituisce il modo privilegiato, spesso il solo possibile, di interagire produttivamente con le figure sullo schermo.

Attività in un AGD


Il **processo** di costruzione del significato di un concetto figurale **non è spontaneo**

➤ Esplorazione di configurazioni e formulazione di congetture



L'**obiettivo** di promuovere lo sviluppo di abilità di **visualizzazione** si intreccia funzionalmente con altri obiettivi:

- sviluppare abilità di **problem solving**
- sviluppare abilità di **modeling geometrico**
- Introdurre alla **dimostrazione**
- Introdurre all'idea di **teoria**
- ...



Riesaminiamo l'attività con l'AGD

Riconoscimento di forme a “colpo d'occhio”. Leggi di organizzazione visiva (gestalt) che operano a livello inconscio.

La realizzazione del disegno richiede l'organizzazione degli elementi visivi secondo i vincoli propri degli strumenti tecnici disponibili. Viceversa il modo di vedere/guardare il disegno è guidato dal processo di realizzazione del disegno e dagli strumenti usati.

È presente un riferimento a una descrizione "geometrica" esplicita, a esplicite relazioni tra enunciati.

Riesan
l'AGD

Perceptual apprehension

con

Riconoscimento di forme a "colpo d'occhio". Leggi di organizzazione visiva (gestalt) che operano a livello inconscio.

Sequential apprehension

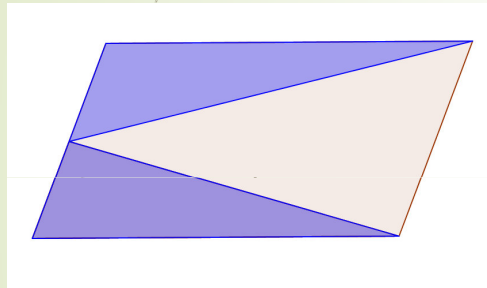
La realizzazione del disegno richiede l'organizzazione degli elementi visivi secondo i vincoli propri degli strumenti tecnici disponibili. Viceversa il modo di vedere/guardare il disegno è guidato dal processo di realizzazione del disegno e dagli strumenti usati.

Discursive apprehension

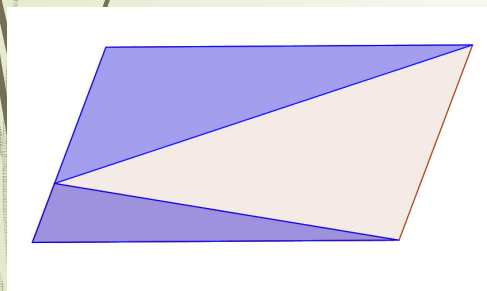
È presente un riferimento a una descrizione "geometrica" esplicita, a esplicite relazioni tra enunciati.

(Duval, 1995)

In ciascun disegno,
confronta tra loro le
aree delle due parti
azzurre

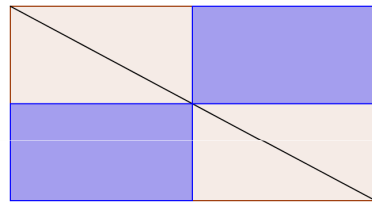


56%

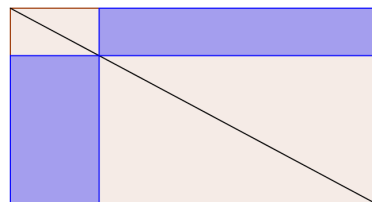


34%

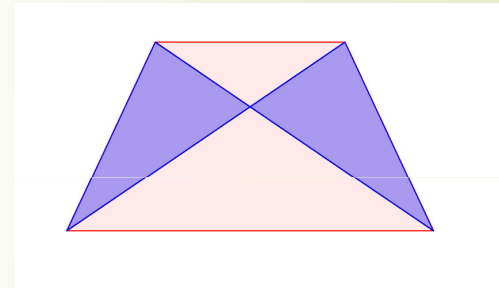
Confronta tra loro le aree delle due
parti azzurre



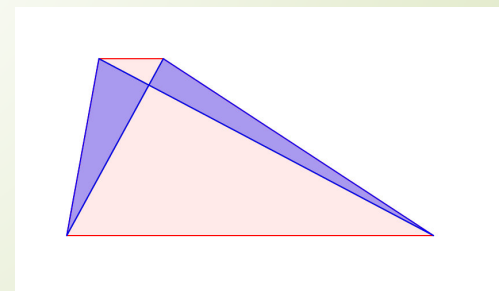
60%



24%



11%



0%



Operational apprehension

Riconoscimento della possibilità di modificare il disegno: modificare dimensione, orientazione e posizione nel piano o nello spazio; **riconoscere e combinare sottoconfigurazioni** .

(Duval, 1995)



Qualcosa su cui pensare...

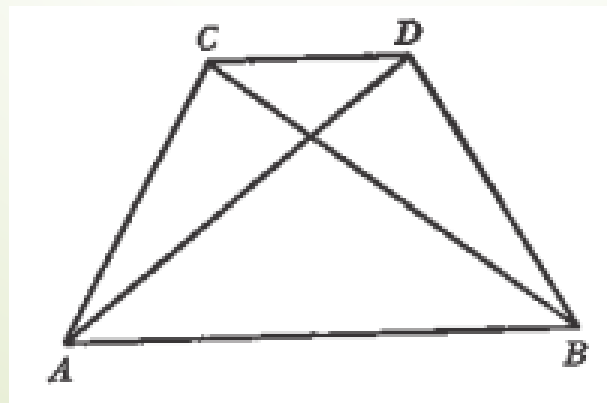
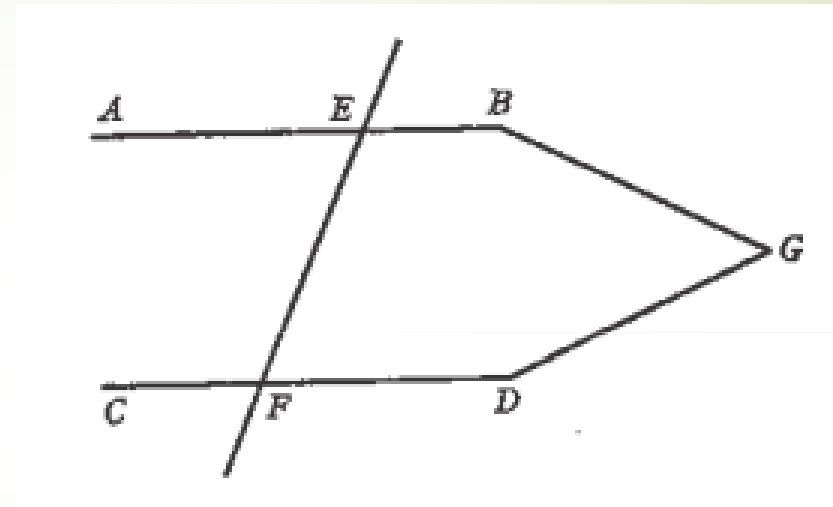
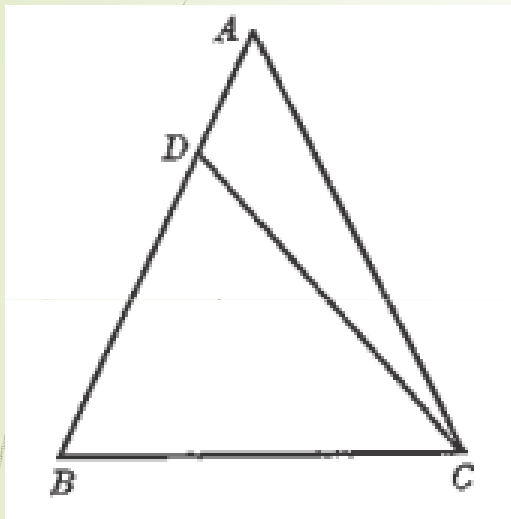
Operational apprehension

Riconoscimento della possibilità di modificare il disegno: modificare dimensione, orientazione e posizione nel piano o nello spazio; **riconoscere e combinare sottoconfigurazioni** .

Un AGD ha le potenzialità di mediare lo sviluppo di questa forma di abilità di visualizzazione? In riferimento a quali specifiche attività?

Qualcosa su cui pensare...

I disegni impossibili





Qualcosa su cui pensare...

“La Geometria prende le mosse dall’esperienza **spaziale**, **visiva** e **tattile** (vedere e toccare gli oggetti), o anche **motoria** (noi ci muoviamo tra gli oggetti e li spostiamo)”

(Speranza, 1988)

L’esperienza tattile e motoria nella produzione di un disegno con un AGD è diversa da quella con strumenti fisici. Quale impatto sullo sviluppo delle abilità di visualizzazione?



Qualcosa su cui pensare...

What are the roles of gestures in
mathematical visualization?

(Presmeg, 2006/2014)



Un citazione

Per “vedere” si sottintende il **risultato di un percorso culturale**, che porta a sapere cosa cercare in un'immagine guidati da un sviluppato senso di rilevanza e di aspettativa.

(Giardino & Piazza, 2008)



Grazie



Una segnalazione

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
E DELLE SCIENZE INTEGRATE

VOL.40 B N.3
GIUGNO 2017

Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica¹

Elisa Miragliotta*, Anna Baccaglini-Frank**, Luigi Tomasi*

**Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi
di Ferrara*

***Dipartimento di Matematica, Università di Pisa*



Il tema della «Visualizzazione» nella ricerca didattica

- ▶ studio delle strategie immaginative di studenti e insegnanti;
 - ▶ studio delle pratiche didattiche, mirate a favorire processi di visualizzazione, e dei loro effetti;
 - ▶ studio degli «stili di apprendimento»;
 - ▶ ...
- ▶ **elaborazione di costrutti teorici;**
 - ▶ studio del **valore** della visualizzazione in matematica e nell'attività matematica

Abstraction in ME

Giftedness and High Ability in Mathematics

Problem Solving in ME

Information and Communication Technology (ICT) Affordances in ME

Mathematics Classroom Assessment

Visualization and Learning in ME

Mathematics Teachers and Curricula

Shape and Space – Geometry Teaching and Learning

Number Teaching and Learning

Calculus Teaching and Learning

Stephen Lerman
Editor
Encyclopedia of
Mathematics
Education

SpringerReference

Abstraction in
ME

Giftedness and
High Ability in
Mathematics

Problem Solving
in ME

Information and
Communication
Technology
(ICT) Affordances
in ME

Mathematics
Classroom
Assessment

Visualization
and Learning in
ME

Mathematics
Teachers and
Curricula

Shape and
Space –
Geometry
Teaching and
Learning

Number
Teaching and
Learning

Calculus
Teaching and
Learning

Stephen Lerman
Editor
Encyclopedia of
Mathematics
Education

SpringerReference

Abstraction in ME

Bloom's Taxonomy in ME

Calculus Teaching and Learning

Problem Solving in ME

Semiotics in ME

Information and Communication Technology (ICT) Affordances in ME

Mathematics Classroom Assessment

Number Teaching and Learning

Metaphors in ME

Visualization and Learning in ME

Shape and Space – Geometry Teaching and Learning

Professional Learning Communities in ME

Epistemological obstacles in ME

Mathematical Teachers and Curricula

Mathematical Knowledge for Teaching

Giftedness and High Ability in Mathematics

Learning Environments in ME

Stephen Lerman
Editor
Encyclopedia of
Mathematics
Education