

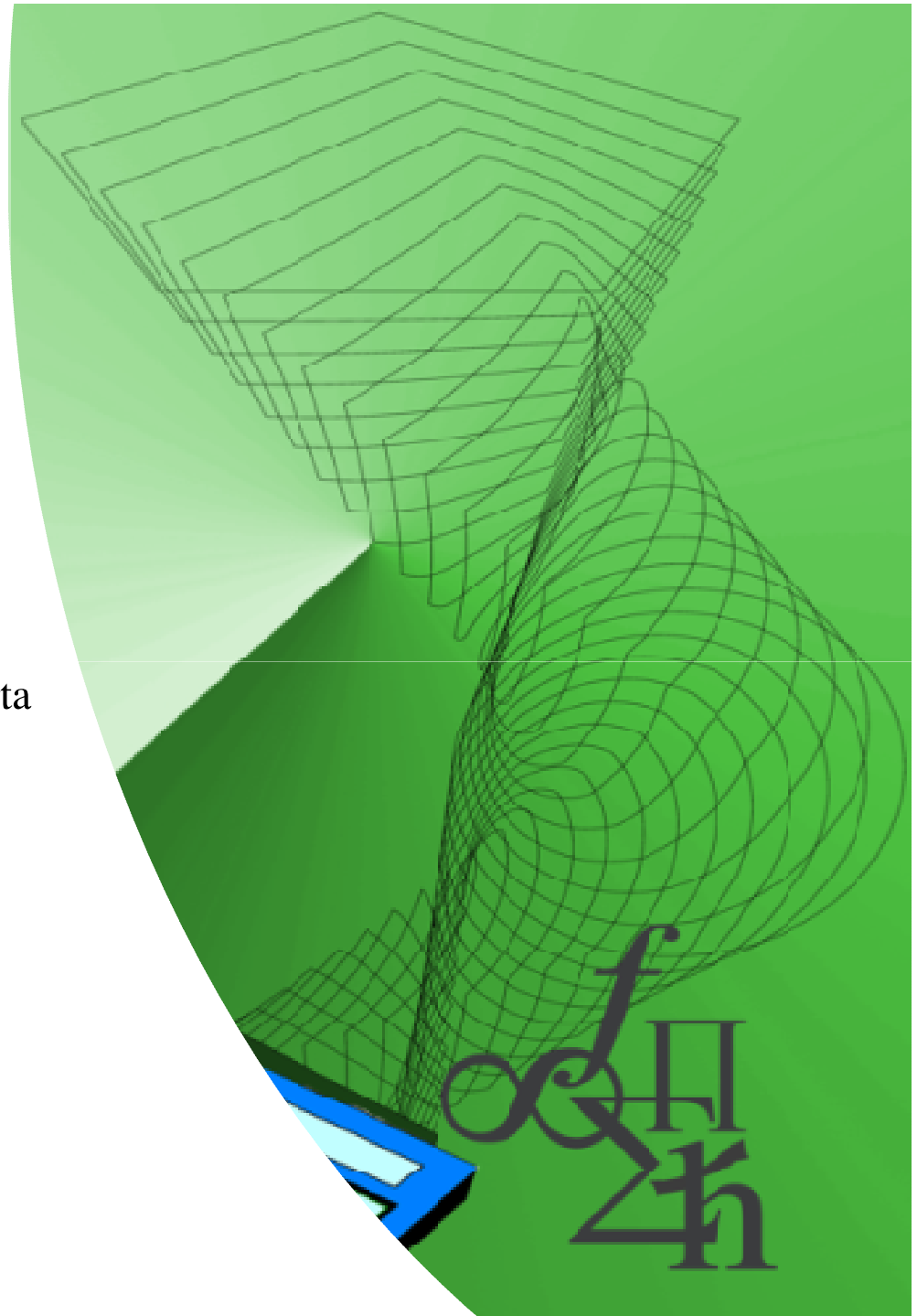
VIII CONVEGNO NAZIONALE DI **DI**DATTICA
DELLA **FISICA** E DELLA **MA**TEMATICA
DI.FI.MA 2017

Uso di artefatti e dell'Inquiry per la scoperta
delle geometrie non Euclidee

M. Liguori⁽¹⁾, R. Capone⁽²⁾

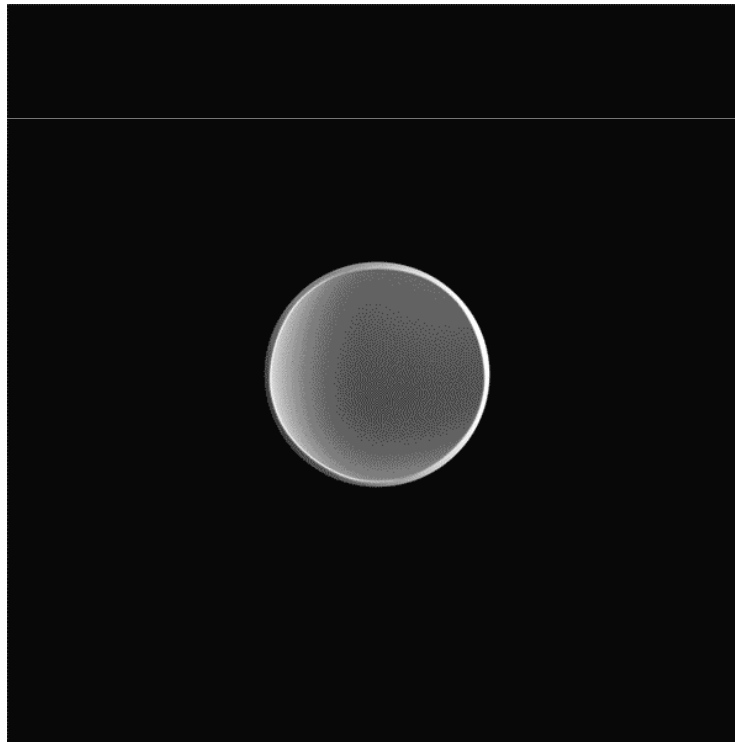
(1) Istituto Magistrale "G. Guacci" - Benevento

(2) Dipartimento di Matematica – Università di Salerno



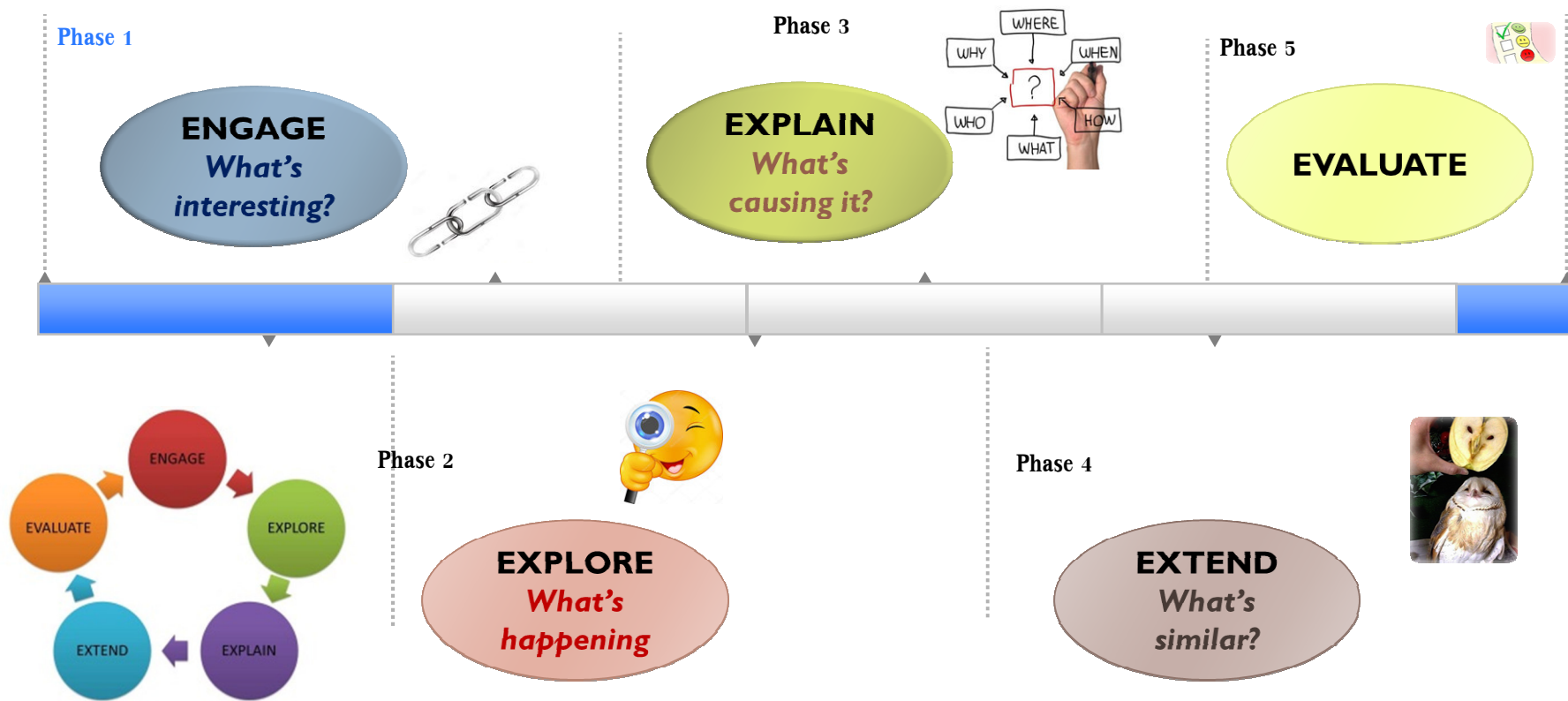
Introduzione

In questo lavoro viene presentato un argomento poco trattato nel biennio delle Scuola Secondaria di II grado di qualsiasi indirizzo, l'introduzione delle Geometrie non Euclidee utilizzando artefatti ed oggetti di uso comune.



Metodologia

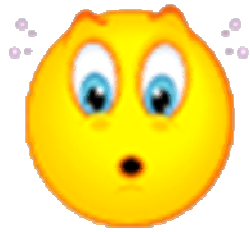
Enquiry (5E Model)



T.E.M.I.

Teaching Enquiry with Mysteries Incorporated

Metodologia



- **Engage:** si presenta alla classe il mistero e si attiva la curiosità attraverso domande mirate alla investigazione



- **Explore:** la classe, incoraggiata da alcune domande poste dal docente inizia a “esplorare” raccogliendo evidenze sperimentali



- **Explain:** gli studenti sono incoraggiati a fornire una loro spiegazione basandosi sulle nozioni apprese fino a quel momento

- **Extend:** gli studenti estendono ciò che hanno imparato e/o confrontano le nuove conoscenze con quelle già note



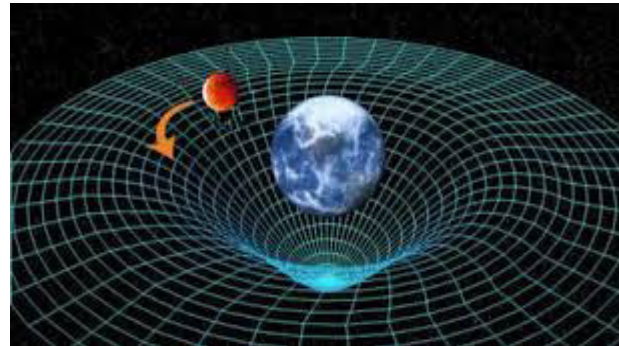


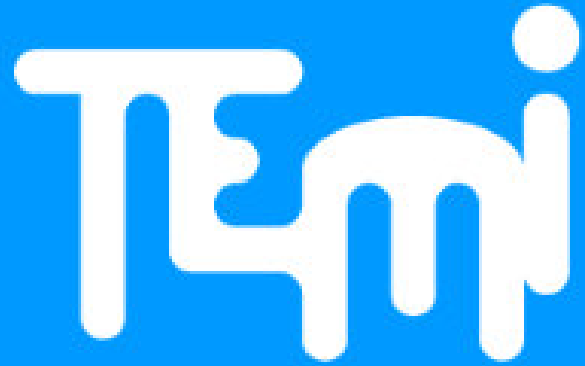
Evaluate: la lezione si completa proponendo un questionario da somministrare in classe o da svolgere a casa al fine di valutare la comprensione e l'apprendimento dell'argomento trattato

ENGAGE

ENGAGE
*What's
interesting?*

- Cosa hanno in comune gli oggetti raffigurati?
- Posso disegnare delle rette su di essi?





TEACHING ENQUIRY
with MYSTERIES INCORPORATED

MISTERY

Se per un punto esterno
ad una retta passasse più
di una retta parallela ?

Se non esistessero le rette
parallele?

ENGAGE

Poniamo agli studenti le seguenti domande:

- Cosa affermano i Postulati di Euclide?
- In cosa si differenzia il V Postulato dai primi quattro?
- Qual è la differenza tra Postulato e Teorema?

Postulato

affermazioni valide che si riferiscono agli enti primitivi di una geometria

Assioma

proprietà logiche valide non solo per la geometria

Teorema

affermazione contenente ipotesi e tesi e che necessita di dimostrazione

Elenchiamo i primi quattro **Postulati**.

Risulti Postulato che:

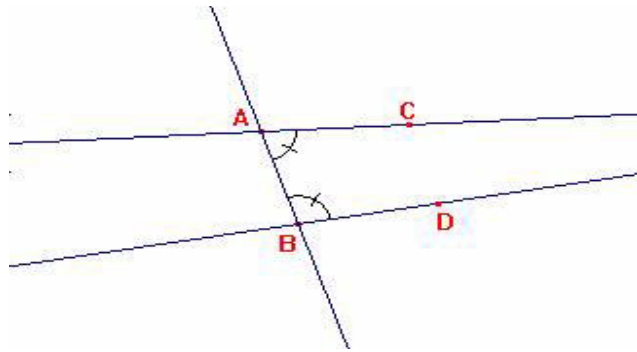
- Per due punti passa una sola retta.
- Ogni retta si può prolungare all'infinito
- Si può descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio
- Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro

Soffermiamoci **sul V Postulato** che possiamo esprimere nella sua formulazione più nota:

Fissati nel piano un punto P ed una retta r , non passante per P , **esiste ed è unica** la retta s passante per P e parallela alla retta fissata r . (Playfair)

E nella formulazione originale di Euclide

Se in un una retta, intersecando altre due, forma con esse da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di 180° , **allora** esse prolungate all'infinito si incontreranno dalla detta parte



Prestando attenzione alle due formulazioni ci rendiamo conto che il V Postulato è formulato in modo differente dai primi quattro e che somiglia ad un Teorema.

Possiamo eliminare o dimostrare il V Postulato?

Il V Postulato non può essere eliminato perché da esso discendono teoremi notevoli:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto
- Rette parallele sono equidistanti
- Teoremi sui parallelogrammi
- Equivalenza delle figure piane
- Teorema di Pitagora
- Similitudine
- Applicazione in geometria analitica e trigonometria
- La curvatura del piano è nulla

EXPLORE

*What's
happening*

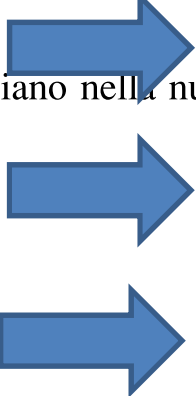
EXPLORE

- Inviteremo gli studenti a disegnare delle rette sul cartoncino, sulla sfera e sul modello in carta della sella.
- Posso disegnare rette parallele?
- Su queste superfici è valido il V Postulato?



Explore

Prima di lasciar lavorare i ragazzi in autonomia e lasciarli giungere alle conclusioni attese, li aiuteremo definendo punti, rette e piani delle nuove geometrie

- punto Euclideo punto nella nuova geometria
 - retta Euclidea retta nella nuova geometria
 - piano Euclideo piano nella nuova geometria
- 

EXPLORE
*What's
happening*

EXPLORE

Geometria ellittica



Piano
Superficie della sfera

Punto
Coppia di punti diametralmente
opposti

Rette
Circonferenze massime

Geometria iperbolica



Piano
cerchio privato del bordo

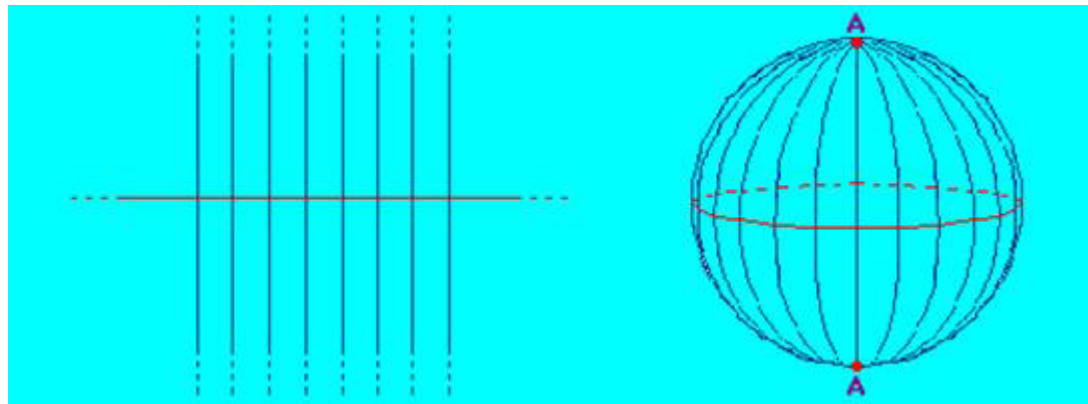
Punto
Punti interni alla circonferenza

Rette
Diametri e archi ortogonali alla
circonferenza che delimita il
bordo

Geometria ellittica

Data una retta sulla sfera ed un punto esterno ad essa esiste una sola retta parallela?

I ragazzi sono pronti per disegnare sulla sfera di polistirolo la retta parallela ad una retta data. La risposta attesa è che la retta parallela non esiste perché per il punto A passano infinite circonferenze massime!



Quindi sulla sfera viene meno l'unicità della retta parallela del V Postulato.

POSTULATO N1

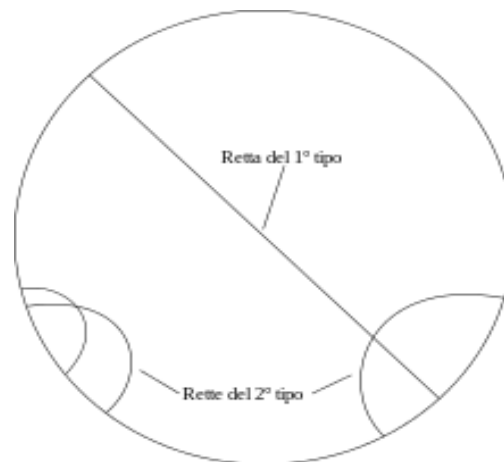
**data una retta r ed un punto esterno ad essa non
esistono rette parallele.**



GEOMETRIA ELLITTICA

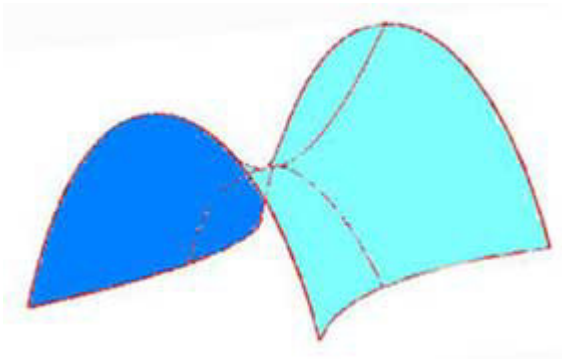
Geometria iperbolica

- Il Piano di [Poincarè](#) è la regione di piano racchiusa in una circonferenza.
- Il punto è ogni punto interno alla circonferenza esclusi i punti sulla circonferenza.
- La retta è ogni diametro e ogni arco di circonferenza interno al piano e ortogonale alla circonferenza che delimita il piano.

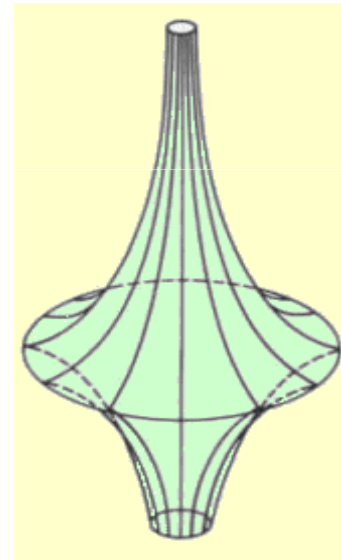


Il piano iperbolico può essere rappresentato da

Il piano a Sella

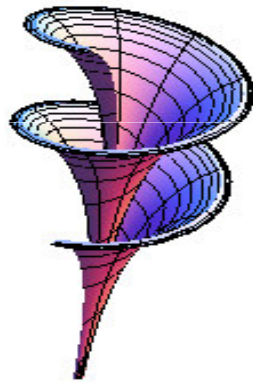


Da un solido di rotazione detto Pseudosfera

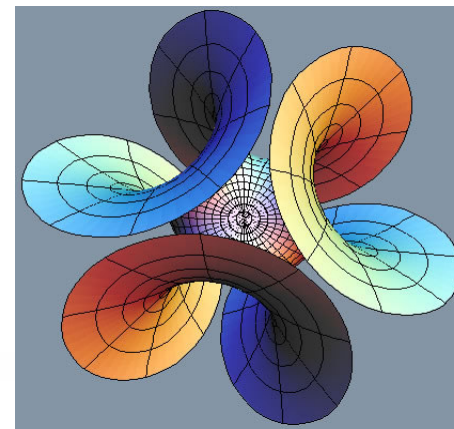


Il piano iperbolico si può estendere all' infinito in due modi

Avvolgendolo su se stesso



Estendendo il bordo



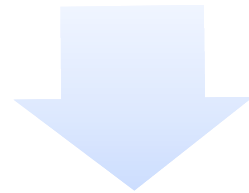
Sul piano di Poincarè, data una retta ed un punto esterno ad essa, esiste la retta parallela? Se si quante sono ?

- Manipolando i modelli iperbolici realizzati all'uncinetto gli studenti potranno verificare che esistono **infinite rette** parallele



POSTULATO N2

data una retta r ed un punto esterno ad essa esistono infinite rette parallele.



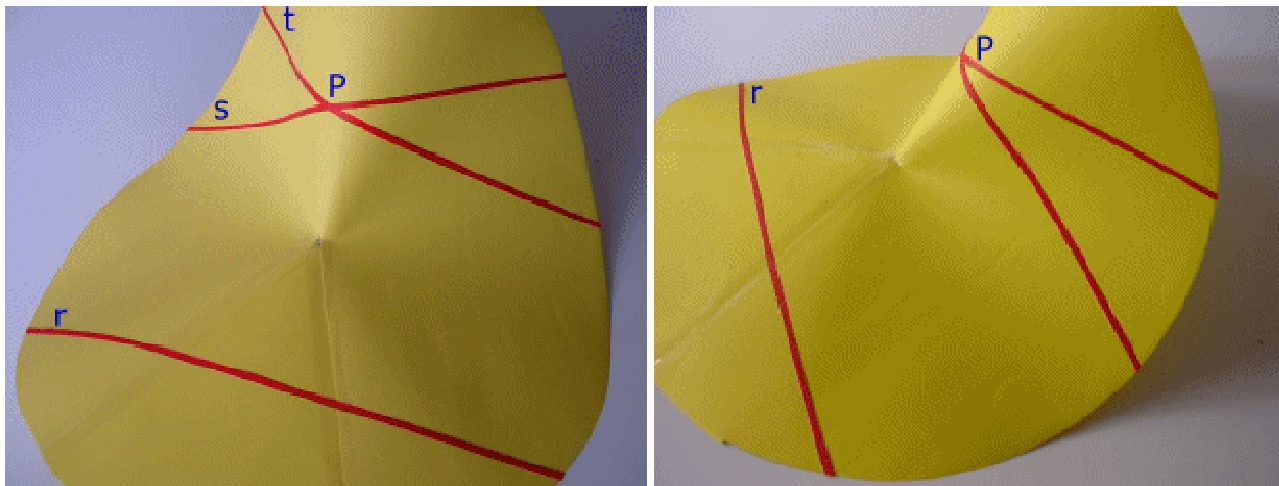
GEOMETRIA IPERBOLICA

EXPLAIN

*What's
causing it?*

EXPLAIN

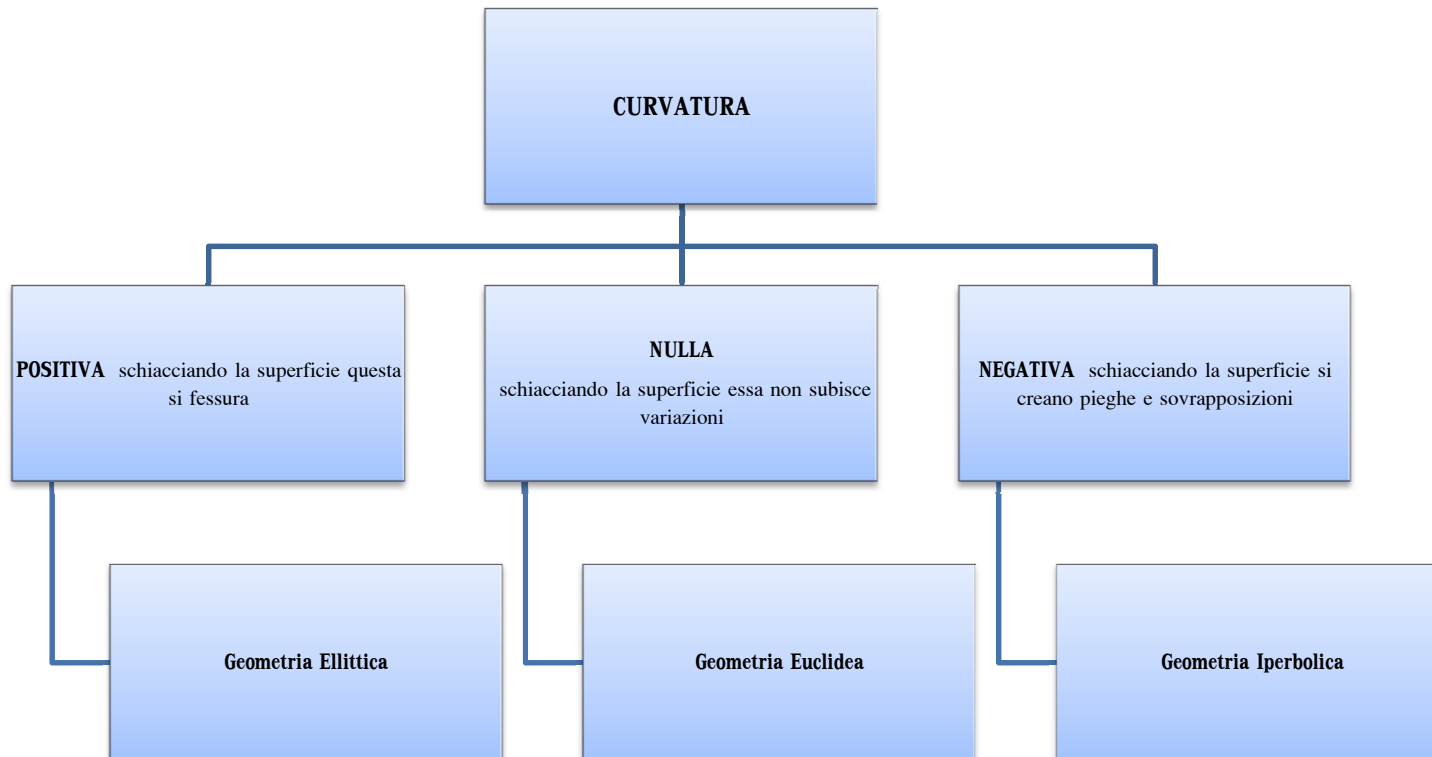
- Si introduce il concetto di geodetica sulle tre superfici mediante l'uso di puntine, elastici e striscioline di carta



EXPLAIN
*What's
causing it?*

EXPLAIN

- Si introduce anche il concetto di curvatura, sempre in modo intuitivo.



EXTEND

*What's
similar?*

EXTEND

In questa fase gli studenti devono essere in grado di

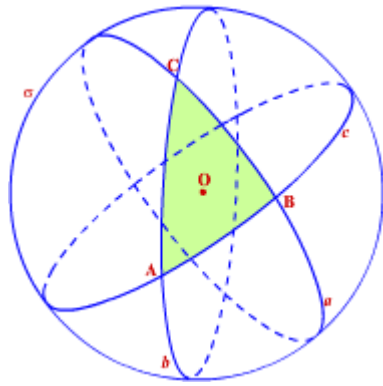
- disegnare triangoli sulle tre superfici
- Osservare cosa accade alla somma degli angoli interni
- Come si modifica l'area delle superfici piane

EXTEND

What's similar?

EXTEND

- Sulla sfera la somma degli angoli interni è maggiore dell'angolo piatto
- Sul piano iperbolico la somma degli angoli interni è minore dell'angolo piatto





EVALUATE

EVALUATE

La fase finale consiste nella valutazione che può essere effettuata mediante

- questionario da svolgere a casa
- Mostrando in classe oggetti di uso quotidiano o immagini e chiedendo di associare ogni modello alla giusta geometria

EVALUATE

EVALUATE

Esempio di alcune domande

- Data una retta ed un punto esterno ad essa, esiste ed è unica la perpendicolare ad essa?
- Quanto vale la somma degli angoli interni di un rettangolo?
- Come varia l'area di una figura piana ritagliata dal piano iperbolico? E dalla sfera?

Realizzazione del progetto

La lezione è stata presentata in una seconda classe del Liceo indirizzo Economico Sociale, formata da studenti non particolarmente brillanti in matematica.

All'inizio erano più incuriositi al materiale da me utilizzato che dall'argomento in sé. Dopo le prime domande li ho invitati a disegnare le rette sul cartoncino seguendo alla lettera il V Postulato nella sua forma originale ed è nata subito una bella discussione sul concetto di piano infinito.

Siamo passati alla sfera, disegnando punti utilizzando le puntine e le rette. Ora i ragazzi si sono mostrati più interessati ed è nato un bel confronto tra gli allievi più bravini e quelli diciamo meno bravi, sul come disegnare le rette parallele!

Compreso alcuni meccanismi grafici sono stati in grado di proseguire da soli l'esplorazione sulla sfera riproducendo l'ortogonalità tra rette e i triangoli; hanno anche fatto in autonomia collegamenti con nozioni quali meridiani e paralleli

A questo punto ho introdotto il piano di Poincaré disegnandolo alla lavagna, come mi aspettavo, i ragazzi erano perplessi sulla definizione di retta. Preso il modello in carta della sella li ho invitati ad incollare delle strisce di carta su di essa; si sono convinti del fatto che le rette si presentano come archi di circonferenza e il significato di geodetica è stato prontamente compreso.

Alla vista dei modelli crochet realizzati da me sono stati in grado di percepire immediatamente le proprietà della geometria iperbolica.

Ho concluso la lezione mostrando loro alcuni oggetti quali un cespo di insalata ricca, foglie di pungitopo, una bottiglia di plastica le patatine Pringles invitandoli a classificarli nella giusta geometria. Ci sono riusciti!