VIII Convegno Nazionale
di DIdattica della FIsica e della MAtematica
DI.FI.MA 2017

Prove standardizzate ed argomentazione:

analisi di una sperimentazione sull'uso del linguaggio algebrico

Simone Quartara
ITS "Italo Calvino" - Genova

Il Contesto della Sperimentazione

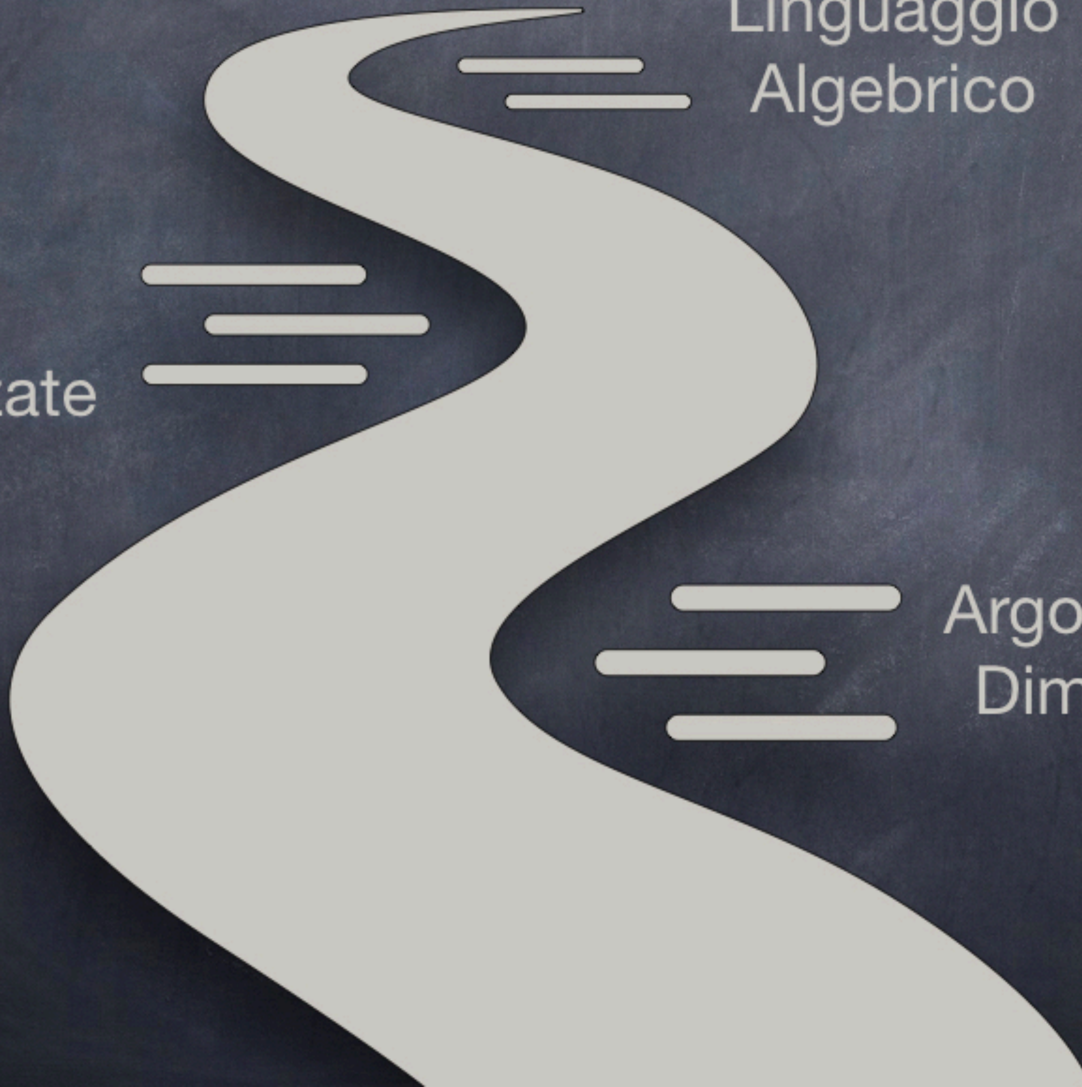
- **Progetto: "Linguaggio e argomentazione"**
  PLS DIMA

- **Biennio**
  scuola secondaria
  II grado

- **19 studenti** liceo delle
  scienze umane
  base – economico sociale

- A.S. 2015/16 & 2016/17
- 12 unità orarie
- Febbraio 2016
- Maggio 2017

L'Articolazione del Percorso



Linguaggio Algebrico

INVALSI
Prove
Standardizzate

Argomentazione
Dimostrazione

ARGOMENTAZIONE

PERCHÉ

- Competenza **trasversale**
- Educazione alla **cittadinanza**
- Costruzione di **significati**
- Come **mezzo** e come **fine**

COME

- Non confinare le attività in uno **spazio ristretto**
- Sfruttare **richieste** come: *"spiega perchè", "confronta" "stabilisci se"….*
- **Contesto** educativo
- Pedagogia dell'**errore**

(Morselli, Testera & Sibilla, 2015)

Modello di Toulmin

"Data"

$n > 0$

$n > 0$

"Conclusion"

$n^2 + n + 1$

Non è sempre primo

$n^2 + n + 1$

è sempre primo

"Warrant"

$n = 10 \rightarrow 111$

$n = 1 \rightarrow 3; \quad n = 2 \rightarrow 7; \quad n = 3 \rightarrow 13$

"Backing"

Controesempio/Divisibilità per 3

(The uses of arguments, 1974)

Modello di Habermas

"Un comportamento in una pratica discorsiva può essere caratterizzato in base a tre criteri di razionalità"

(Truth and justification, 2003)

- Razionalità **epistemica**
- Razionalità **teleologica**
- Razionalità **comunicativa**

Habermas & Dimostrazione

- Razionalità **epistemica:**

  validazione delle affermazioni a partire da premesse accettate e utilizzando regole di ragionamento corrette

- Razionalità **teleologica:**

  scelte strategiche in relazione allo scopo
  (congettura e dimostrazione come problem solving)

- Razionalità **comunicativa:**

  conformità alle regole di produzione e presentazione del prodotto, condivise all'interno della comunità di riferimento

(Boero P. & Morselli F, 2011)

Habermas & Linguaggio Algebrico

- Razionalità **epistemica:**
  - requisito di modellizzazione: correttezza formalizzazioni,
  - requisito sistemico: regole sintattiche di trattamento.

- Razionalità **teleologica:**

  scelte consapevoli di:
  - formalizzazioni algebriche,
  - trasformazioni,
  - interpretazioni orientate.

- Razionalità **comunicativa:**
  - conformità alle regole di notazione condivise,
  - comunicazione con se stessi

(Boero P. & Morselli F, 2011)

Linguaggio Algebrico

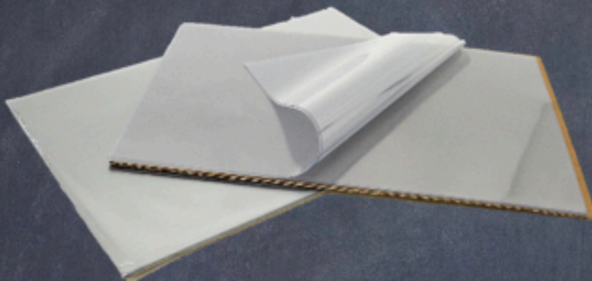
Comportamenti caratterizzanti il **symbol sense**:

- fare amicizia con i simboli;
- manipolare ed oltre: leggere attraverso i simboli;
- costruire espressioni simboliche;
- espressioni equivalenti, significati non equivalenti;
- scelta dei simboli;
- flessibilità nelle manipolazioni;
- symbol in retrospect;
- symbol in context.

(Arcavi, Symbol Sense, 1994)

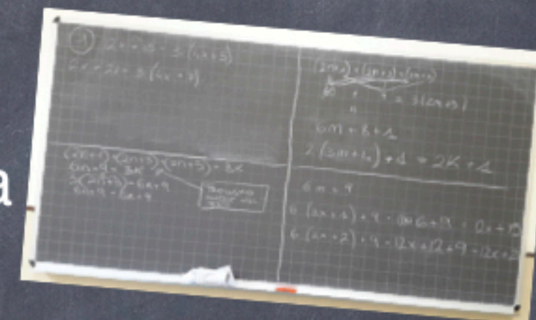
Scelte Metodologiche & Analisi Dati

- Schede di lavoro



- Discussione di gruppo

- Foto Lavagna



- Diario di bordo

- Protocolli degli studenti

Le Schede di Lavoro

https://drive.google.com/open?id=0B_RMc1qogjDddDUtY1o3ZHJNVnc

- **Tipologia di quesiti:**

a) Prove INVALSI 2006 - 2011- 2013 - 2014

- **Tipi attività:**

a) Conversioni dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa
b) Congetture e argomentazioni
c) Narrazione di bilancio

- **Consegna comune:**

Analizza i seguenti quesiti riportando negli spazi vuoti (o su un foglio a parte) tutte le osservazioni utili per rispondere a ciascuna richiesta

....Dal Quesito_D26 2016

Una sorgente luminosa puntiforme è posta nel vuoto. *I* è l'intensità luminosa misurata a una distanza *r* dalla sorgente. Il prodotto fra l'intensità luminosa *I* e il quadrato della distanza *r* dalla sorgente è uguale a una costante *k*.

a. **Quale fra le seguenti formule esprime la relazione tra *I* e *r*?**

A. ☐ $\frac{I}{r^2} = k$

B. ☐ $\left(\frac{I}{r}\right)^2 = k$

C. ☐ $I \cdot r^2 = k$

D. ☐ $(I \cdot r)^2 = k$

Come hai fatto a stabilirlo?

b.

Se la distanza r raddoppia, cosa puoi affermare sull'intensità luminosa I?

Come motivi la tua affermazione?

….Dal Quesito_D6 2014

Marco afferma che, per ogni numero naturale *n* maggiore di 0, $n^2 + n + 1$ è un numero primo. Marco ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ **Marco ha ragione, perché** ……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

☐ **Marco non ha ragione, perché** ………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Quesito n.2_Seconda parte

Luca, Andrea e Anna, come te, hanno affrontato il quesito 1 e hanno risposto come riportato di seguito:

- Luca: *"Marco ha ragione, perché per $n = 1$ ottengo 3 che è primo, per $n = 3$ ottengo 13 che è primo e per $n = 5$ ottengo 31 che è primo"*.
- Andrea: *"Marco non ha ragione, perché si sa che un numero primo è divisibile solo per se stesso e per 1"*.
- Anna: *"Marco ha ragione perché io ho provato con un numero grande come $n = 50$ ed ho ottenuto 2551 che è un numero primo"*.

Cosa puoi dire a proposito delle loro affermazioni?

....DAL QUESITO_D14 2011

L'insegnante chiede: "Se *n* è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?"
Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".
Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".
Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".
Chi ha ragione?

- ☐ A. Tutti e tre
- ☐ B. Solo Mario
- ☐ C. Solo Luisa
- ☐ D. Solo Giovanni

Come hai fatto a stabilire chi ha ragione?

Quesito n.5_Seconda parte

Nelle schede precedenti abbiamo visto che la verifica su uno o più esempi non basta per affermare che un'affermazione è sempre vera.

Prova a produrre una spiegazione generale per l'affermazione che ritieni vera, utilizzando l'algebra.

....Dai Protocolli

Quesito n.2_Prima parte

Marco afferma che: "*Per ogni numero naturale n maggiore di 0, n^2+n+1 è un numero primo*".

Marco ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- Marco ha ragione, perché sostituendo n con un numero ad esempio

$$2^2+2+1 = 4+2+1 = 7 \rightarrow \text{NUMERO PRIMO}$$

- Marco ha ragione, perché perché prendendo un qualsiasi numero naturale e svolgete i seguenti passaggi uscirà un numero primo

Es: $2^2+2+1 = 6+1 = 7$ / $3^2+3+1 = 12+1 = 13$ / $7^2+7+1 = 56+1 = 57$

- X Marco ha ragione, perché nelle varie prove effettuate il risultato, nel 100% dei casi, è stato un numero primo.

$n^2+n+1 = n(n+1)+1 \rightarrow$ DISPARI $\rightarrow$ N° PRIMI SONO SEMPRE DISPARI

+1 LO RENDE NON DIVISIBILE PER n

….Dai Protocolli

Quesito n.2_Prima parte

Marco afferma che: "*Per ogni numero naturale n maggiore di 0,* n^2+n+1 *è un numero primo*".

1 2 3 ecc

TUTTI

$3+3+1$

$4+4+1$

Marco ha ragione?

- Marco non ha ragione perché solo alcuni numeri ~~sono~~ vengono primi non tutti allora marco avrebbe dovuto dire alcuni numeri il ~~vengono primi~~ risultato è un numero primo.

$n \geq 5$

7^2+7+1

$5^2+5+1=31$

$4^2+4+1=21$

$3^2+3+1=13$

$6^2+6+1=43$

- Marco non ha ragione perché $(4)^2+4+1$

$= 16+4+1 = 21 \rightarrow$ NON È UN NUMERO PRIMO

DIVISIBILE PER 3/7

OPPURE ~~$(5)^2+5+1 = 25+5+1 =$~~

SBAGLIATO

….Dai Protocolli

Luca:"*Marco ha ragione, perché per n=1 ottengo 3 che è* primo, per n=3 ottengo 13 che è primo e per n=5 ottengo 31*che è primo*".

Luca : Bisogna cercare di trovare il contro esempio che mi contraddice l'affermazione.

Luca: l'aver provato con vari numeri è positivo, ma, forse, provare con più numeri sarebbe stato ~~positivo~~ meglio (oltre al provare a dare anche una spiegazione generale).

HA FATTO POCHI ESEMPI PER DIRE UNA COSA CON CERTEZZA, POTEVA ALMENO USARE UN NUMERO PARI ED UNO DISPARI PER ESSERE PIÙ SICURO

….Dai Protocolli

Andrea: *"Marco non ha ragione, perché si sa che un numero primo è divisibile solo per se stesso e per 1".*

Mentre Andrea a ragione perchè è vero che un N° primo si divide sempre per se stesso e per 1.

A ANDREA DIREI CHE NON C'ENTRA CHE UN NUMERO PRIMO È DIVISIBILE SOLO PER SE STESSO O 1 QUESTA AFFERMAZIONE PUÒ ESSERE UTILIZZATA COME REGOLA PER INDIVIDUARE I NUMERI PRIMI MA NON PER DIRE CHE MARCO NON HA RAGIONE

....DAI PROTOCOLLI

$[\, I \cdot r^2 = k \,]$ Se la distanza r raddoppia, cosa puoi affermare sull'intensità luminosa I? Come motivi la tua affermazione?

Se la distanza (r) raddoppia anche l'intensità luminosa a sua volta raddoppia.

Se la distanza r radoppia, I (intensità luminosa) diminuisce perchè ho pensato a r come una macchina fotografica, se si allontana l'obbiettivo da un elemento che si vuole raffigurare questo diminuirà, la sua dimensione reale sarà sempre quella

SE LA DISTANZA R RADDOPPIA, L'INTENSITÀ LUMINOSA ~~[illegible]~~ SI DIMEZZA PERCHÉ PIÚ SI È LONTANI PIÚ L'INTENSITÀ LUMINOSA SARÀ BASSA.

$\frac{I}{2} \cdot 2r^2 = K$

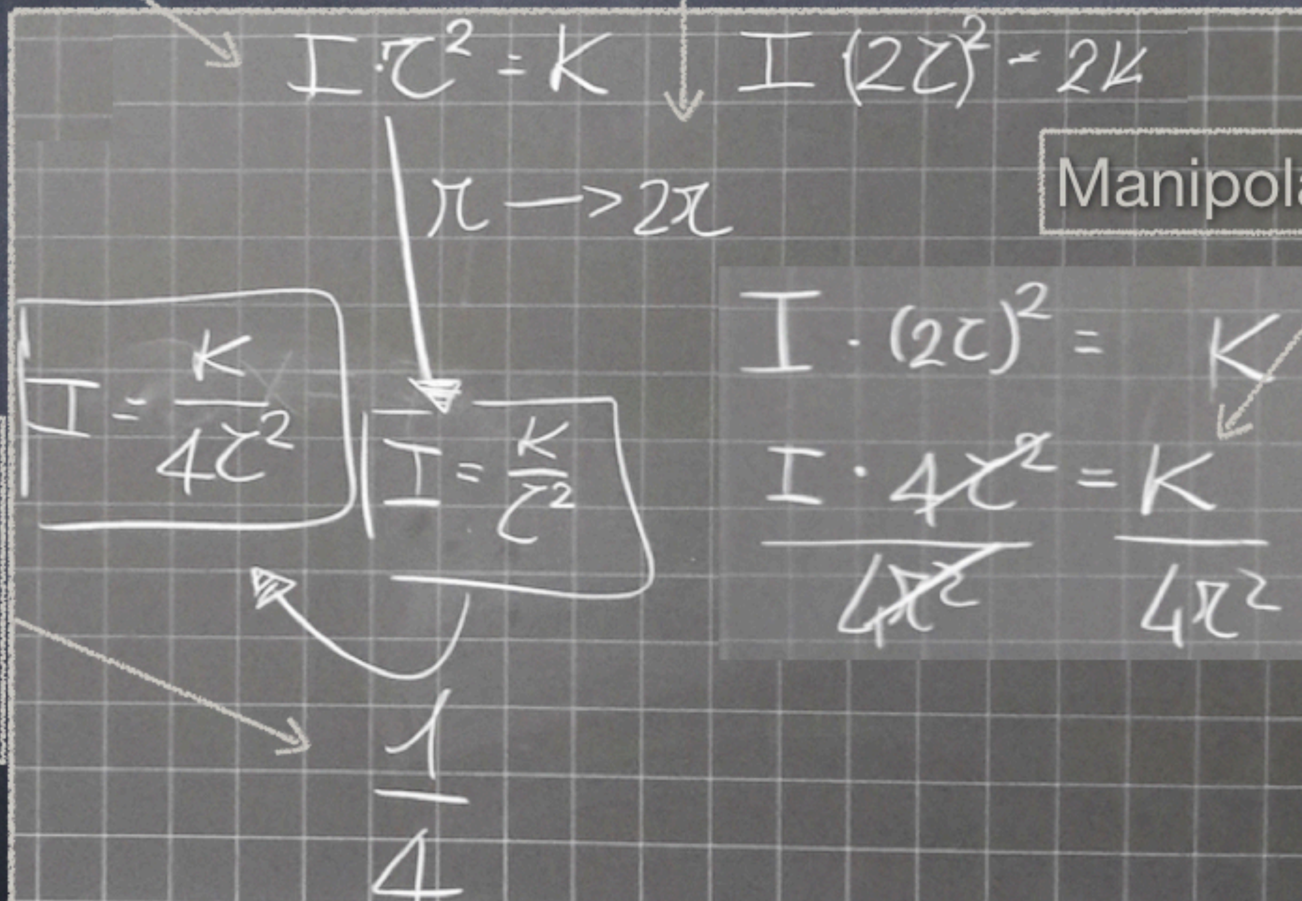
….Dalla Discussione

Messa in formula

Sostituzione

Manipolazione

Leggere attraverso i simboli f(2x)=f(x)/4



….Dai Protocolli

Giulia: *"Per ogni numero naturale n maggiore di 1, (n-1)n(n+1) è divisibile per 6"*. Giulia ha ragione? Come fai a stabilirlo?

poiché penso che 4 esempi bastino arrivo
alla fine dicendo che è vero ed
ha ragione Giulia.

si ha ragione ma come lo scrivo?
$\forall (n)>1\ [(n-1)\cdot n\cdot(n+1)]:6$

Ho notato che i numeri so-
no in sequenza, questo potreb-
be essere un fattore che porti i numeri a poter essere divisibili per 6

….Dai Protocolli

"Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i numeri 2n+1, 2n+3, 2n+5?"

Secondo me:

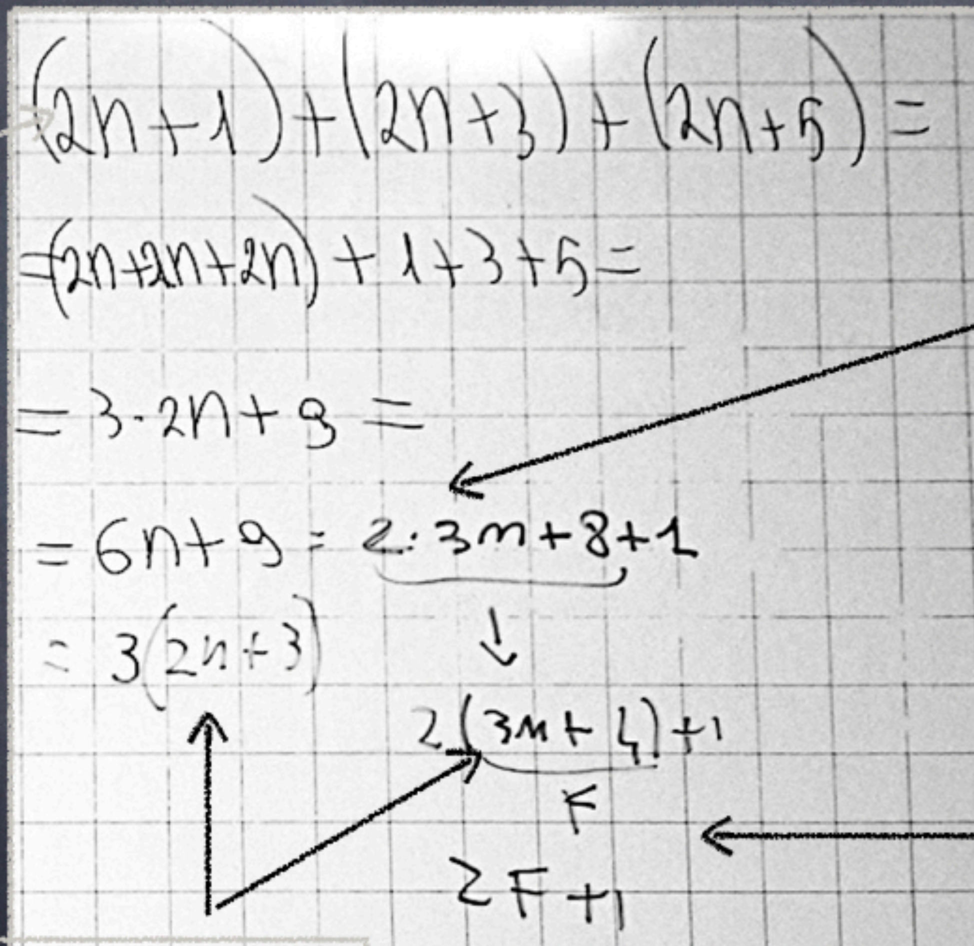
$(2n+5)+(2n+3)+(2n+1)$ è uguale a $=(2n+3)+(2n+3)+(2n+3)$

quindi $(2n+3)\cdot 3$ che è il triplo di $2n+3$ ed è sempre un multiplo di 3. È dispari perchè come abbiamo visto nel quesito 4 un n° dispari $(2n+3)$ moltiplicato per un n° dispari fa sempre un n° dispari

….Dalla Discussione

Espressione simbolica

Flessibilità nella manipolazione

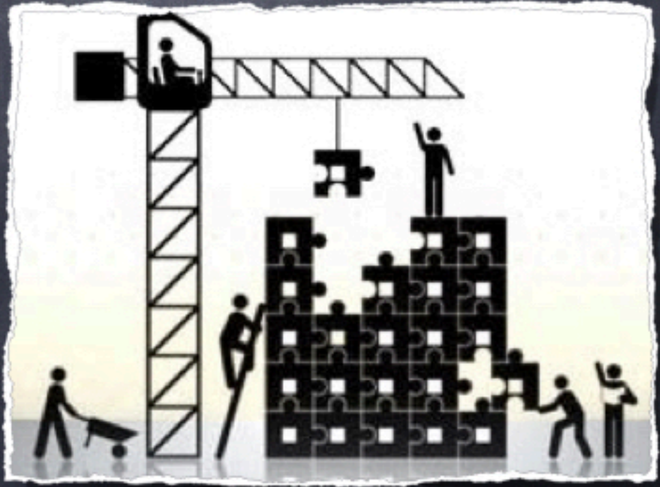


Scelta dei simboli

Espressioni equivalenti significati non equivalenti

.....Possibili Sviluppi

- Progettare attività **argomentative** a partire dalle prove INVALSI riguardanti:
  - costruzione di un **modello**,
  - lettura e analisi di **dati** e **grafici**.



Grazie
per l'Attenzione!

simone.quartara@istruzione.it

….Le Osservazioni degli Studenti

Ho provato un pò di $\boxed{\text{paura}}$ di aver sbagliato anche se ero certa della risposta.

($\boxed{\text{semplice}}$)

(tempo esagerato per lo svolgimento)

MENTRE LO SCRIVEVO IN $\boxed{\text{ANSIA}}$ PERCHE' NON SO SE E' GIUSTO

$$N^2 - 2 = \cancel{X}^3 + 2$$

SONO $\boxed{\text{NERVOSO}}$

(sono $\boxed{\text{confusa}}$ perchè ~~no~~ mi sento che ~~ho~~ scritto male Italiano)

($\boxed{\text{bello}}$ impersonificarsi nell'insegnante)

….Le Osservazioni degli Studenti

(cambierei nel testo la parola "linguaggio naturale" con "una frase")

OSSERVAZIONI:

- il testo iniziale ha un impatto più scoraggiante rispetto ai primi quesiti, poiché più elaborato, ma la risoluzione viene molto veloce perché basta provare con uno dei primi 10 numeri maggiori di 0 che si capisce la non veridicità del quesito
- tempo per lo svolgimento individuale minore di 10 min.

"Valore del controesempio"

….Conversioni di Linguaggi

"Il quadrato di un numero, diminuito di 2, è uguale al cubo della somma tra lo stesso numero e 2" (D6 2006).

Come aiuteresti un compagno che non sa rispondere?

Il quadrato di un numero (un'incognita che può essere "n" o "x" o come la si vuole chiamare) quindi n^2 diminuito di 2, quindi -2 è uguale $(=)$ al cubo cioè $(\;)^3$ della somma dello stesso numero (n) e 2, quindi $(n+2)^3$. Di conseguenza il risultato sarà:

$$n^2 - 2 = (n+2)^3$$

$$\boxed{N^2 - 2 = (N+2)^3}$$

L'HO SCRITTO COPRENDO LE OPZIONI PER ANDARE A LOGICA

GLI CONSIGLIEREI DI UTILIZZARE IL MIO STESSO METODO

....Conversioni di Linguaggi

Come aiuteresti un compagno che non sa rispondere?

bisogna andare di frase in frase analizzando il contenuto di queste:

- il quadrato di un numero (n^2)
- diminuito di due (n^2-2)
- è uguale ($n^2-2=$)
- al cubo della somma ($n^2-2=(..+...)^3$)
- tra lo stesso numero e 2 ($n^2-2=(n+2)^3$)

quindi il risultato è la numero quattro.

Prima cosa che farei è di dirgli di dividere la frase in pezzi

→ |il quadrato di un numero| |diminuito di 2|, |è uguale| |al cubo| |della somma tra lo stesso numero e 2|

↳ n^2 $-$ $(\ )^3$ $n+2$

→ da ... che la prima parte dell'equazione è n^2. ... quadrato diminuito di 2)

2° parte: $(n+2)^2$ → Visto che dice che è LA SOMMA Del numero (n) e di 2 che è alla potenza DI 3 (al cubo)