

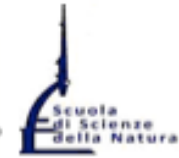


Piano Lauree Scientifiche

In collaborazione con MIUR, con Scienze, Confindustria



DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



I QUADRATI MAGICI: MATEMATICA, MAGIA E MOLTO ALTRO

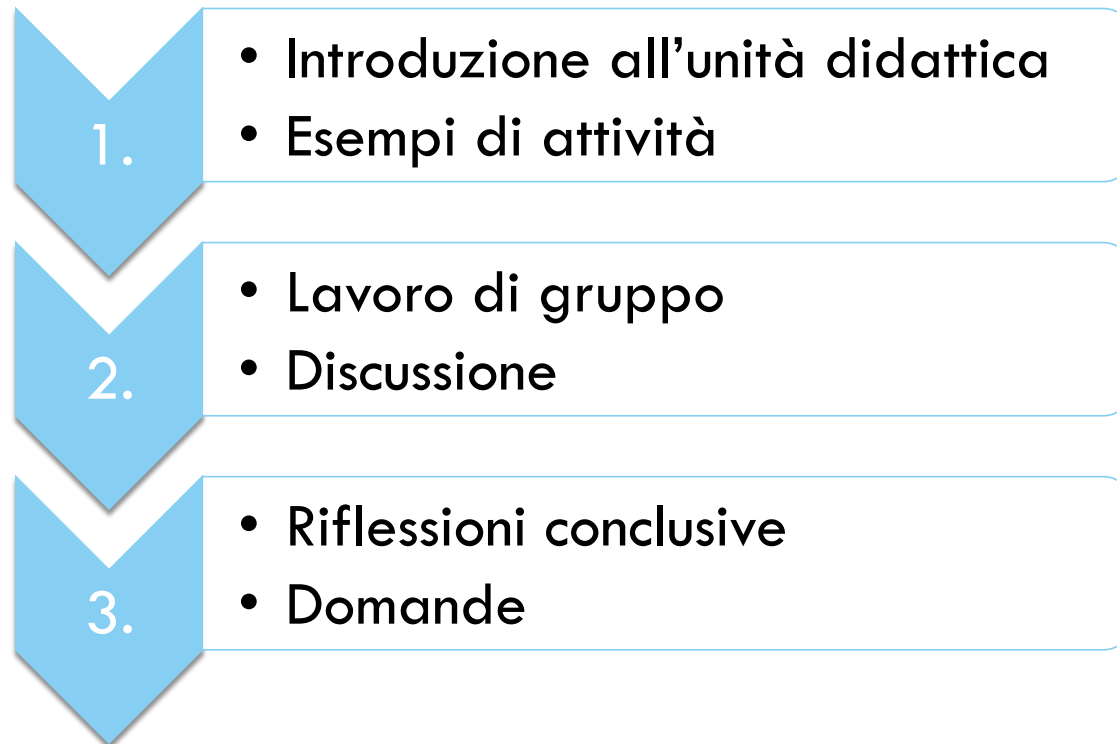
1

Debora Impalà IIS "Giulio Natta" Rivoli (TO)

Giulia Ferrari Università di Torino, Dipartimento di Matematica "G. Peano"

Struttura del laboratorio

2



Introduzione all'unità didattica

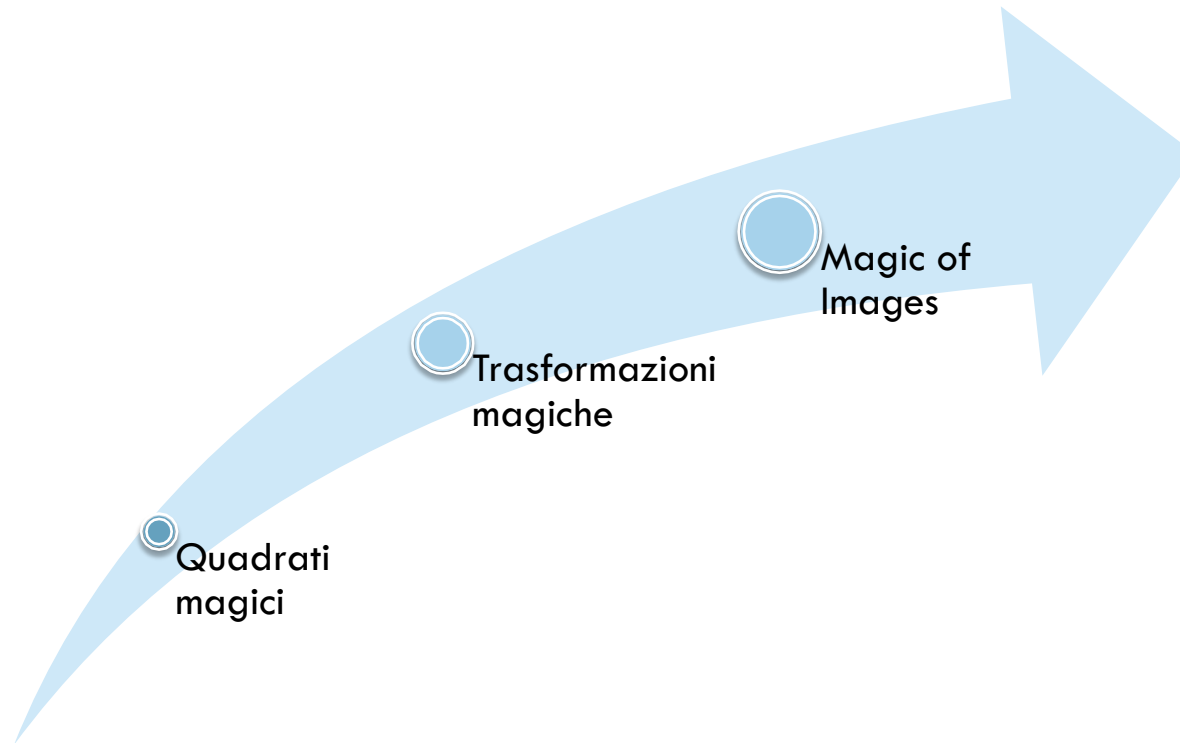
3

ESTRATTO DALLA PROGRAMMAZIONE ANNUALE

1. **DALLA MAGIA DEI QUADRATI ALLA MAGIA DELLE IMMAGINI**
2. **LA LOGICA INTORNO A NOI**
3. **INDUZIONE E TORTE GOLOSE**

Dalla magia dei quadrati alla magia delle immagini

4



Dalla magia dei quadrati alla magia delle immagini

5

1. Stimolare la curiosità
2. Quadrati magici nella storia e nell'arte
3. Fornire le basi matematiche
4. Riconoscere
5. Manipolare quadrati come ciambelle

Quadrati
magici

Trasformazioni
magiche

Magic of
Images

Stimolare la curiosità

6

dai protocolli degli studenti...

FASE 1 : OSSERVAZIONE

I numeri seguenti sono disposti in un quadrato:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

15

Osservandolo quali caratteristiche rilevi?

1. Sono tutti numeri inferiori a 10, nella riga centrale ~~sono numeri interi~~
2. Se lo sommo + numeri che sono al bordo del quadrato, ogni lato fa 15
3. Ogni numero se lo sommo con i numeri orizzontali, verticali o diagonali lo sommo fa sempre 15

Stimolare la curiosità

7

FASE 2 : MANIPOLAZIONE

Somma 10 a tutti gli elementi del primo quadrato e otterrai

12	17	16
19	15	11
14	13	18

Le caratteristiche che avrai individuato sono cambiate?

dai protocolli degli studenti...

Trasformazioni

Invarianti

- Osservare
- Riconoscere proprietà
- Manipolare
- Generalizzare

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

8

	3	
2		1

Completa in modo da ottenere un quadrato magico di somma 9

	2	
1		5

Completa in modo da ottenere un quadrato magico di somma 6

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

9

	4	
2		2

Completa in modo da ottenere un quadrato magico di somma 8

...ma è impossibile!

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

10

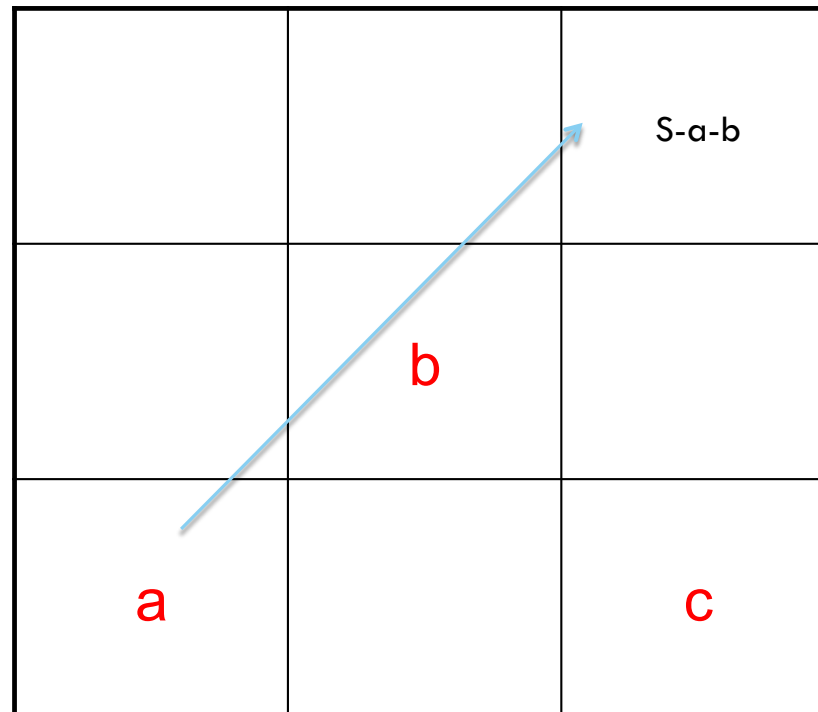
	b	
a		c

Somma = S

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

11

		S-a-b
	b	
a		c

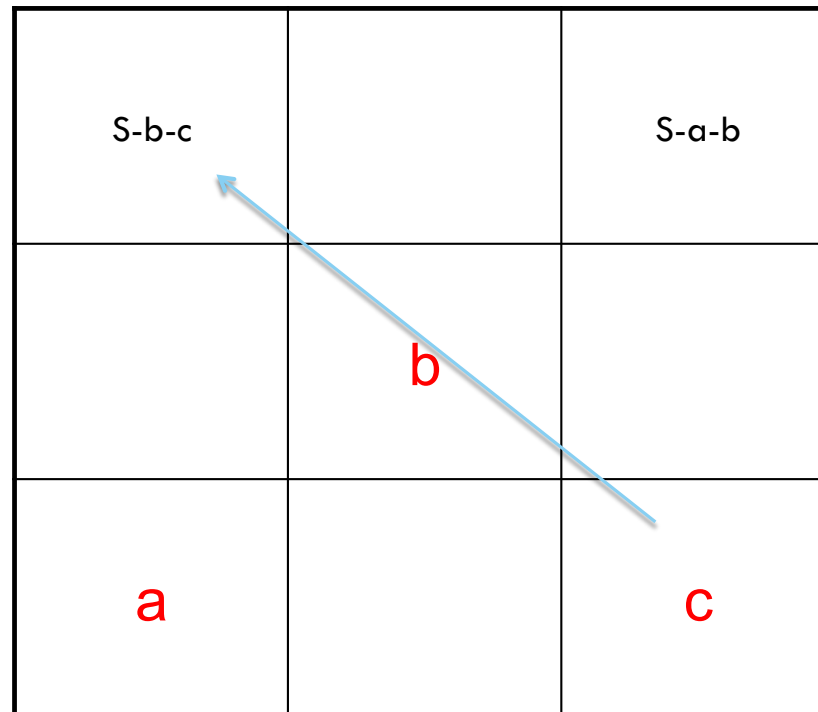


Somma = S

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

12

$S-b-c$		$S-a-b$
	b	
a		c



Somma = S

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

13

$S-b-c$		$S-a-b$
$b+c-a$	b	$b+a-c$
a		c

Somma = S

$$S = 3b$$

A. Arcavi (1994). For the Learning of Mathematics 14(3), 24-35

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

14

$S-b-c$		$S-a-b$
$b+c-a$	b	$b+a-c$
a		c

Somma = S

$$S = 3b$$

A. Arcavi (1994). For the Learning of Mathematics 14(3), 24-35

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

15

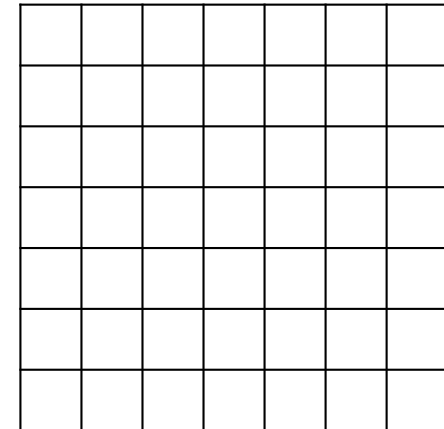
Quadrati normali

$1, 2, 3, \dots, n^2$

$$(1) \quad M(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

M = costante magica

$n \times n$



Dimostrazione semplice:

Sia M la costante magica. Allora la somma dei numeri in ogni riga del quadrato vale M e vi sono n righe: quindi il totale di tutti i numeri sommati è nM .

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

16

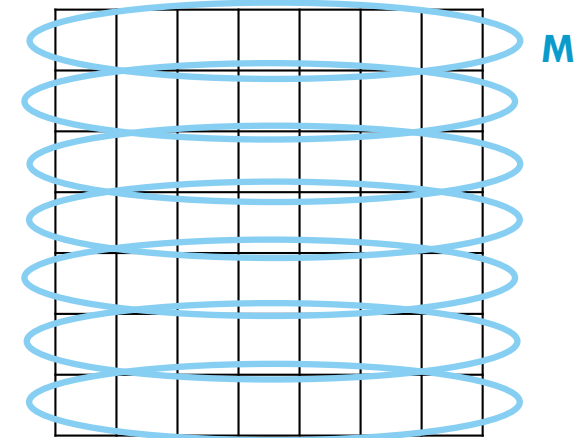
Quadrati normali

$1, 2, 3, \dots, n^2$

$$(1) \quad M(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

M = costante magica

$n \times n$



Dimostrazione semplice:

Sia M la costante magica. Allora la somma dei numeri in ogni riga del quadrato vale M e vi sono n righe: quindi il totale di tutti i numeri sommati è nM .

Possibili sviluppi... verso l'algebra: scheda LPM

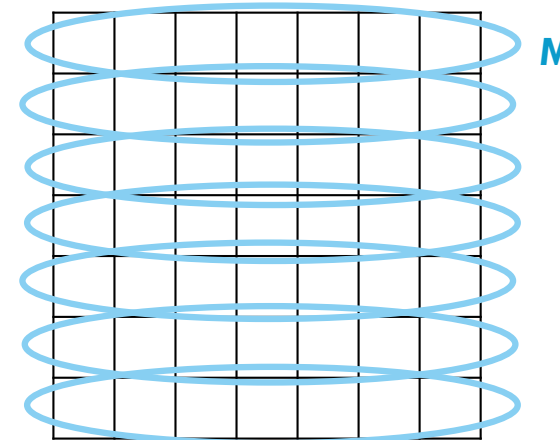
17

Quadrati normali

$1, 2, 3, \dots, n^2$

$$(1) \quad M(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

M = costante magica



$n \times n$

Dimostrazione semplice:

Sia M la costante magica. Allora la somma dei numeri in ogni riga del quadrato vale M e vi sono n righe: quindi il totale di tutti i numeri sommati è nM .

Se sommo tutti i numeri del quadrato ho la somma dei primi n^2 numeri, che vale $\frac{1}{2}[n^2(n^2+1)]$.

Eguagliando le due somme si ottiene la formula (1)

Definizione di Quadrato Magico

18

- Un **quadrato magico** è uno schieramento di numeri interi distinti in una tabella quadrata tale che la **somma** dei numeri presenti in ogni **riga**, in ogni **colonna** e in entrambe le **diagonali** dia sempre lo stesso numero; tale intero è denominato **costante di magia** o costante magica o somma magica del **quadrato**.
- Conoscete esempi di quadrati magici?

Quadrati Magici nella storia e nell'arte

19

Secondo una leggenda cinese, l'imperatore YU (circa 4000 anni fa) stava cercando di arginare una piena del fiume LO (affluente del Fiume Giallo) quando vide uscire dallo stesso fiume una tartaruga divina con dei misteriosi segni sul guscio. Tali segni furono studiati e, capito il messaggio, la piena del fiume fu arginata...

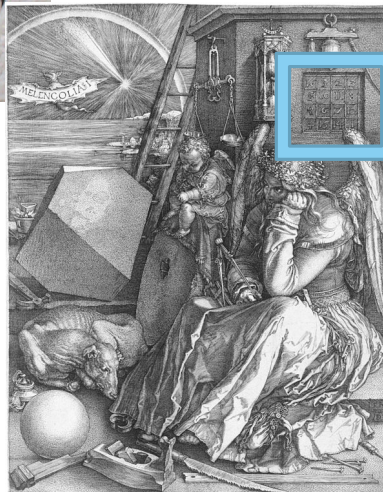


Riflessione sulla distinzione tra
credenza e **scienza**

DiFiMa 2017

Quadrati Magici nella storia e nell'arte

Antoni Gaudi-Sagrada Familia



Melencholia I (1514) - Albrecht Dürer



Quadrato del Sator- Pompei

Fornire le basi matematiche

21

Parte di lezione frontale con formalizzazione

- Definizione di matrice
- Matrici quadrate e rettangolari
- Matrici riga e matrici colonna
- Operazioni con le matrici
 - ▣ SOMMA
 - ▣ PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Riconoscere

22

HAI CAPITO TUTTO?



PER VERIFICARE RIGUARDA IL MATERIALE CHE IL DOCENTE HA FORNITO E POI



PROVA A SVOLGERE I SEGUENTI ESERCIZI

VERIFICA SE I SEGUENTI SONO QUADRATI MAGICI E IN CASO DI RISPOSTA AFFERMATIVA TROVA LA COSTANTE DI MAGIA

3	7	6
9	5	1
4	2	8

ESEGUI LE OPERAZIONI INDICATE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

COMPLETA I QUADRATI MAGICI

13		9
6	10	14
		7

	7	
12	3	6

4	5	16	9
14	11	2	7
		13	
15		3	

DiFiMa 2017

23

Manipolare quadrati come ciambelle

LAVORO DI GRUPPO

METODO:

Inserire i numeri naturali in ordine crescente... da 1 a n^2 , partendo dalla cella centrale della prima riga e muovendosi sempre in diagonale (alto-destra).

METODO:

Inserire i numeri naturali in ordine crescente... da 1 a n^2 , partendo dalla cella centrale della prima riga e muovendosi sempre in diagonale (alto-destra).

ECCEZIONI:

- Se il movimento porta in una casella oltre la prima riga del quadrato magico...
- Se il movimento porta alla destra del quadrato magico...
- Se il movimento porta a una casella già occupata, si torna all'ultima cella completata e si posiziona il numero successivo direttamente al di sotto di essa.

Manipolare quadrati come ciambelle

Fig. 1

		1		
	5			
4				
				3
			2	

4 5 1 2 3

Fig. 2

		1	8	
	5	7		
4	6			
10				3
			2	9

14 11 8 10 12

Fig. 3

		1	8	15
	5	7	14	
4	6	13		
10	12			3
11			2	9

25 23 21 24 27

(solo per quadrati di ordine dispari!)

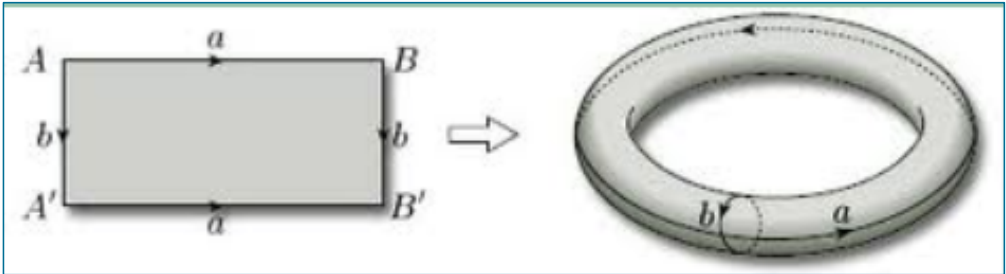


Fig. 4

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

65 65 65 65 65



27

Trasformazioni ... Magiche

LAVORO DI GRUPPO

Quadrati magici

Trasformazioni magiche

Magic of Images

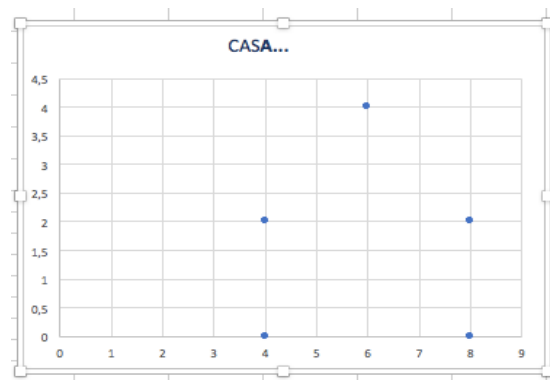
Trasformazioni ... Magiche

28

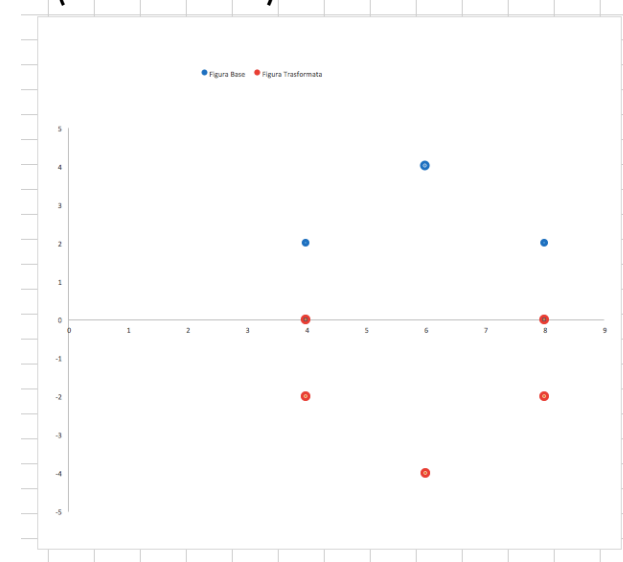


- Immaginate di visualizzare una casa

	A	B
1	x	y
2	6	4
3	4	0
4	8	0
5	4	2
6	8	2
7		

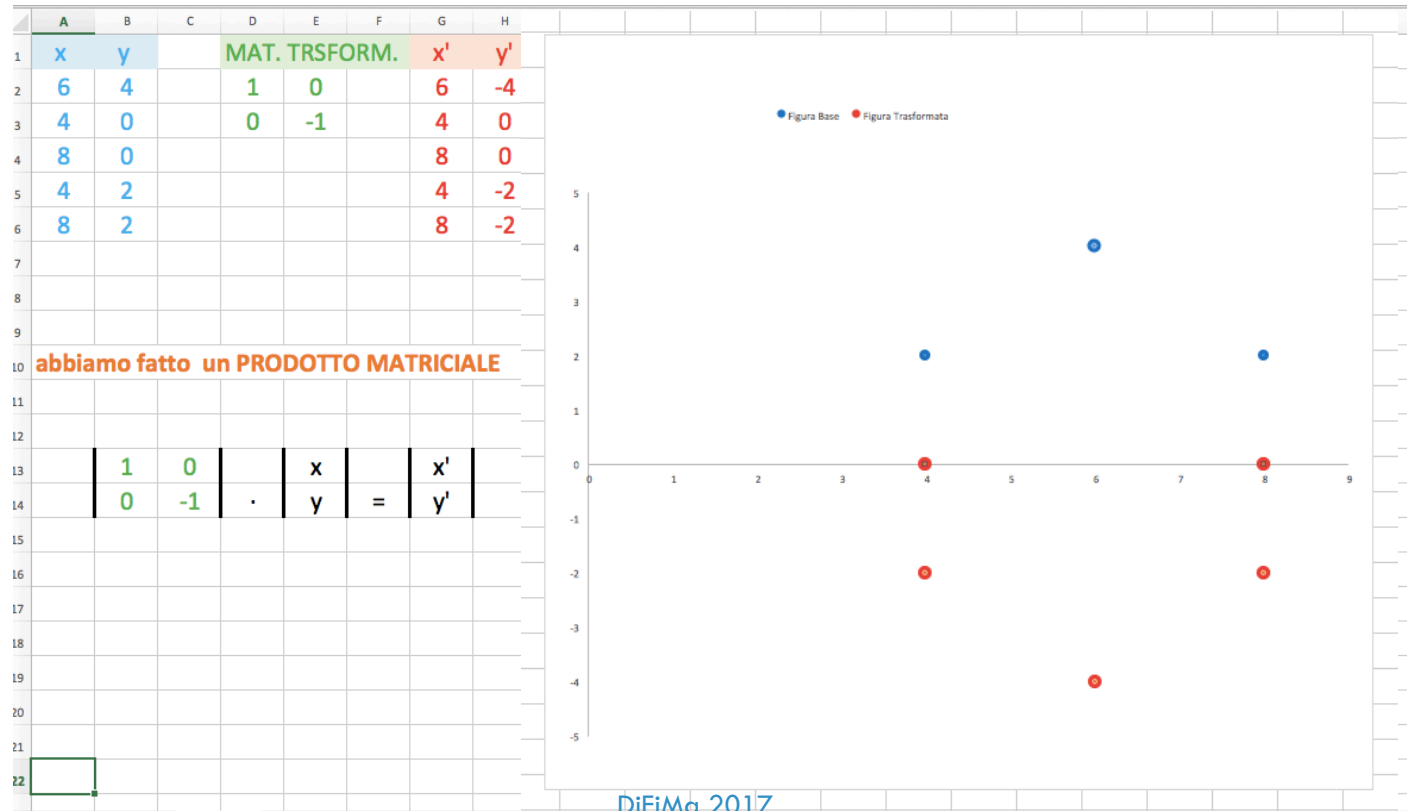


- L'immagine della casa specchiata (trasformata) è:



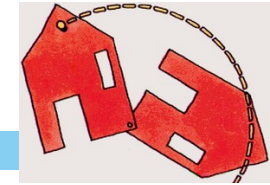
Trasformazioni ... Magiche

29

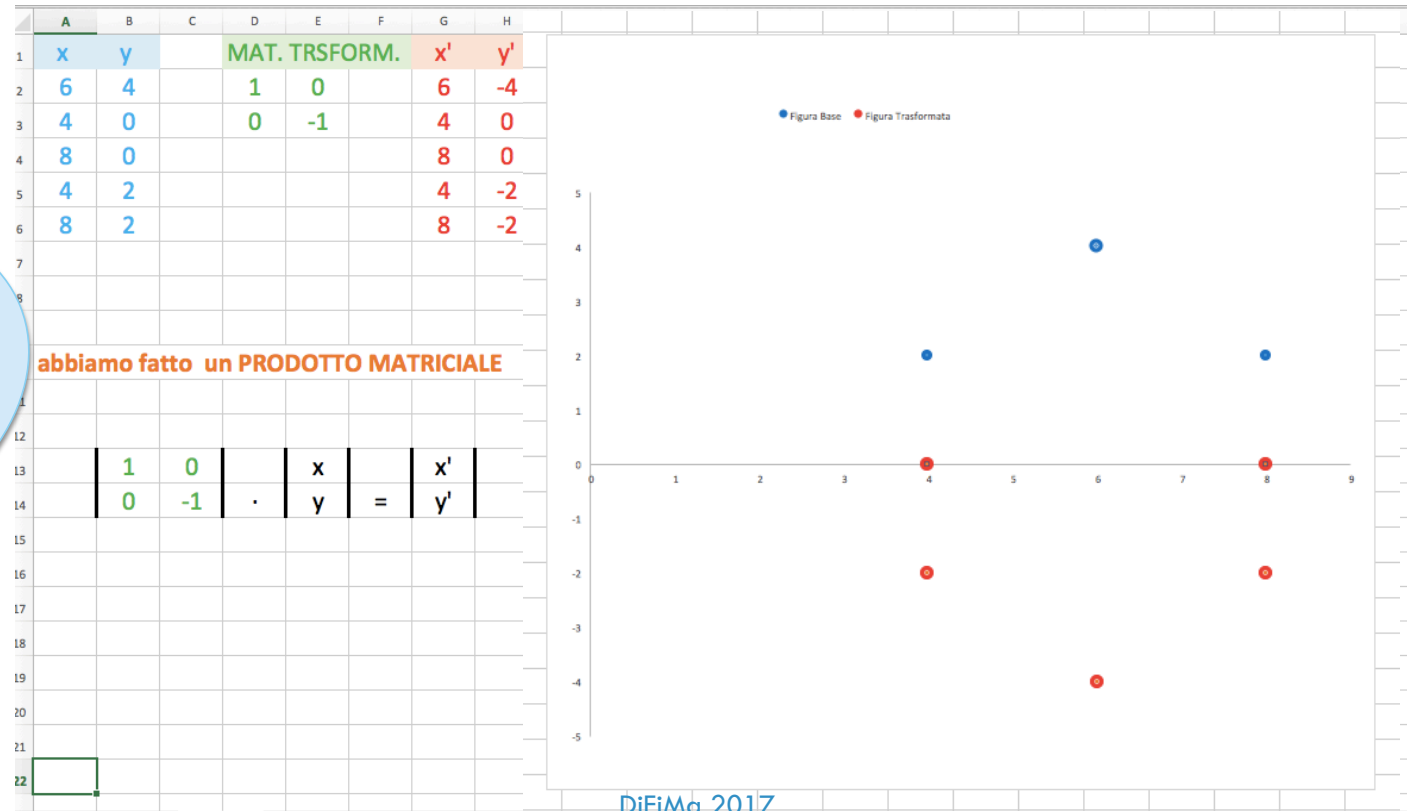


Trasformazioni ... Magiche

30

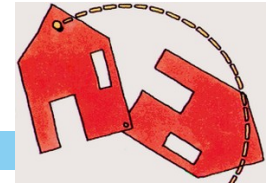


Sveliamo il
trucco:
**PRODOTTO
MATICIALE**

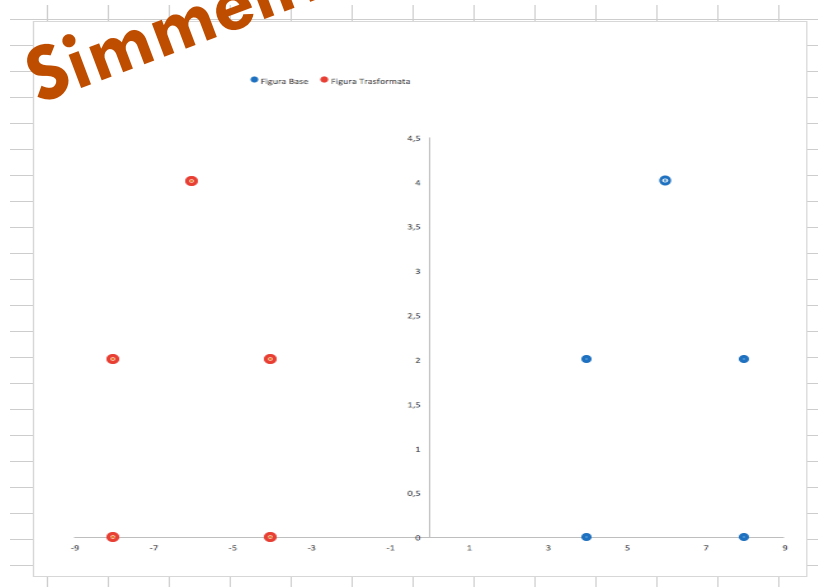


Trasformazioni ... Magiche

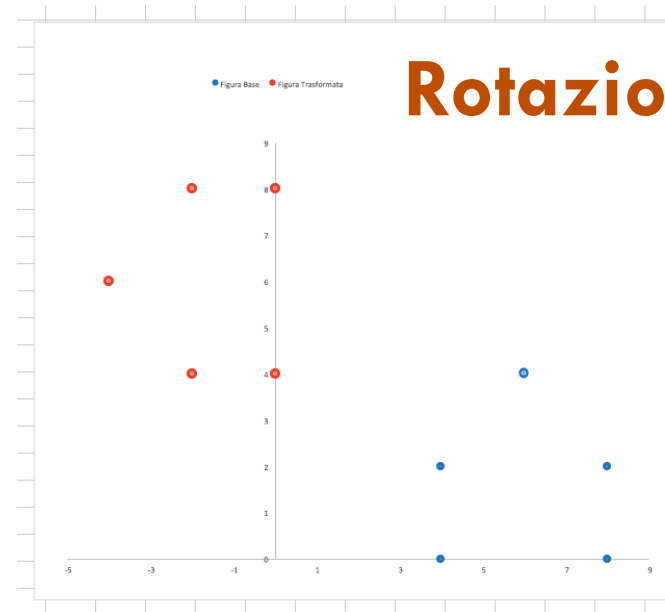
31



Simmetria

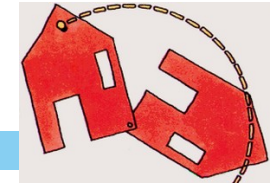


Rotazione

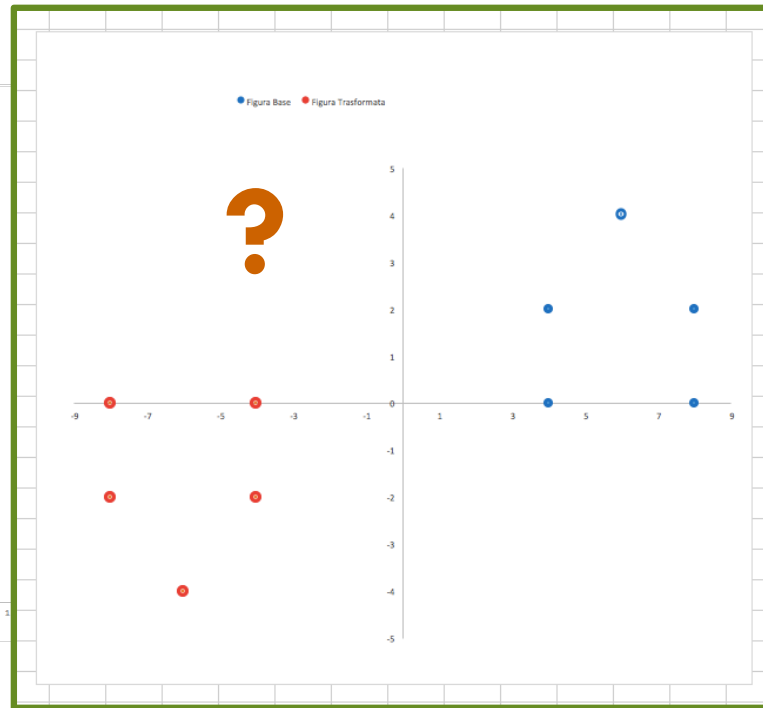


Trasformazioni ... Magiche

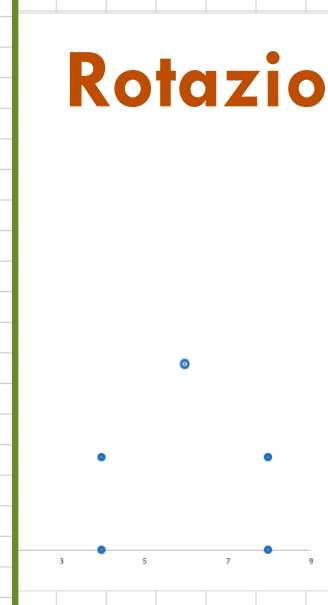
32



Simmetria



Rotazione



Magic of Images

33

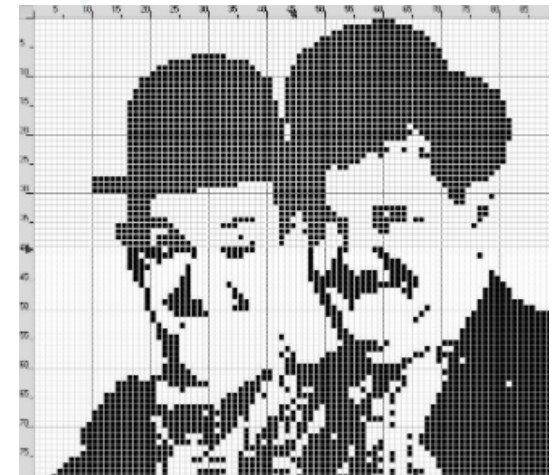
<https://code.org/educate/csp/widgets>

attività in lingua Inglese

Quadrati magici

Trasformazioni magiche

Magic of Images



DiFiMa 2017

Invent a B&W Encoding Scheme

Unit 2 Lesson 3

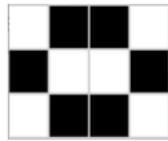
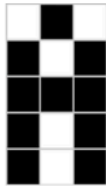
Name(s) _____ Period _____ Date _____

Activity Guide - Invent a B&W Encoding Scheme



Develop an Encoding Scheme

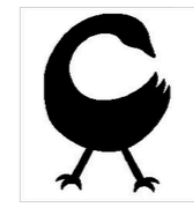
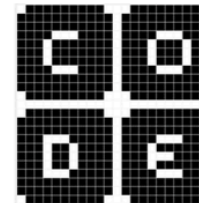
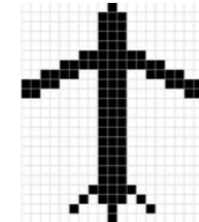
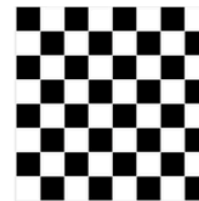
Look at the simple black-and-white images below. With your partner discuss how you might encode images like these in binary.



Record your ideas for your encoding in the space below. As you develop your encoding consider:

- What information will need to be included to reconstruct the image?
- How will that information be represented in binary?
- Try out your encoding with the sample images above. Is there any aspect of your encoding that is ambiguous or could lead to improperly structured images? Could you include more information in your encoding to solve this problem.

Now consider these larger images. Does your encoding scheme still work? Why or why not? What would you have to change to make it work?



Record any new ideas you have in the space provided below.

B&W Pixelation Widget

Activity Guide - B&W Pixelation Widget



Distinzione tra
DATO/
METADATO

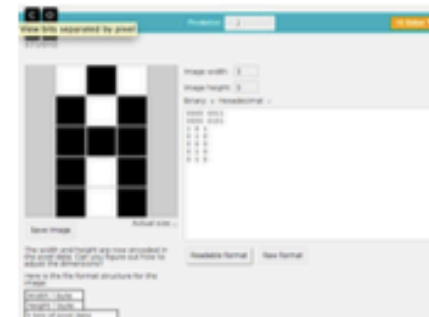
The B&W Pixelation Widget

The pixelation widget uses a file format as depicted below. For example, the 3x5 image of the letter "A," shown at right within the Pixelation tool, would be encoded as a simple stream of these bits, organized like this (color added for emphasis):

000000110000010100000001101010000010010

We can break it up into pieces like so:

purpose	size	example
width	1 byte	0000 0011
height	1 byte	0000 0101
pixel data	varies	00000001101010000010010



B&W Image File Format

<i>metadata</i>	Bits 0-7 (1 byte) = width
	Bits 8-15 (1 byte) = height
<i>pixel data</i>	Bits 16 - n = pixel data
	0 = black (light off)
	1 = white (light on)

Verifica finale

IIS "G.NATTA"
Verifica di Matematica

COGNOME Manca NOME Alessandro 82

1. Dati i quadrati individua quelli magici e in caso affermativo determina la costante di magia

1	2	7
6	5	4
8	3	9

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

5	0	7
6	4	2
1	8	3

NO $K=34$ SI $K=12$

2. Costruisci un quadrato magico 5x5 e ruotalo di 180°: è ancora un quadrato magico?

16	23	1	8	15
22	5	17	14	20
4	6	13	19	21
10	12	18	25	3
11	19	24	2	9

→ se lo si ruota di 180° è ancora un quadrato magico.

9	2	24	17	11
3	25	18	12	10
21	19	13	6	4
20	14	7	5	22
15	8	1	23	16

3. Fare le seguenti operazioni tra matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 65 \end{pmatrix}$$

4. Dati i punti (x,y) della tabella

x	y
1	0
1	3
2	1

$P = (x, y)$ di partenza.
 $P' = (x', y')$ finale.

a. Rappresentali sul piano cartesiano

b. Trasformali secondo la matrice e ottieni i punti (x',y')

x'	y'
1	0
1	6
2	2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c. Rappresenta i nuovi punti sul piano cartesiano

5. Data la seguente figura determina i metadati ed i dati necessari per rappresentarla (in base 2)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

= 1
 = 0

DATI: 9 RIGHE x 8 colonne
1001 = 1000

Verifica finale

37

IIS "G. NATTA"
Verifica di Matematica

COGNOME Manca NOME Alessandro

1. Dati i quadrati individua quelli magici e in caso affermativo determina la costante di magia

$\begin{matrix} 1 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 9 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{matrix}$

2. Costruisci un quadrato magico 5x5 e ruotalo di 180°: è ancora magico?

$\begin{matrix} 16 & 23 & 1 & 8 & 15 \\ 22 & 5 & 7 & 14 & 20 \\ 4 & 6 & 13 & 19 & 21 \\ 10 & 12 & 18 & 25 & 3 \\ 11 & 17 & 24 & 2 & 9 \end{matrix}$

3. Fare le seguenti operazioni tra matrici

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 65 \end{pmatrix}$

dai protocolli degli studenti...

- esercizi vario tipo
- risultati positivi
- premiare l'impegno e motivare gli studenti

4. Dati i punti (x,y) della tabella

x	y
1	0
1	3
2	1

a. Rappresentali sul piano cartesiano

b. Rappresenta i nuovi punti sul piano cartesiano

x'	y'
1	0
1	6
2	2

5. Data la seguente figura determina i metadati ed i dati necessari per rappresentarla (in base 2)

DATI:

 $\begin{matrix} 11000011 \\ 10011001 \\ 10111101 \\ 10011101 \\ 10011001 \\ 11100111 \\ 11100111 \\ 11100111 \\ 11100111 \end{matrix}$

METADATI: 9 RIGHE x 8 colonne
1001 = 1000

COMPETENZE CHIAVE DI CITTADINANZA

- **Imparare ad imparare:** organizzare l'apprendimento utilizzando e scegliendo varie fonti e varie modalità di informazione e formazione anche in funzione dei tempi disponibili, delle proprie strategie e del proprio metodo di studio e di lavoro.
- **Collaborare e partecipare:** interagire nel gruppo comprendendo i diversi punti di vista, valorizzando le proprie ed altrui capacità, gestendo le conflittualità, contribuendo all'apprendimento comune ed attività collettive nel riconoscimento dei diritti degli altri.
- **Agire in modo autonomo e responsabile:** sapersi inserire in modo attivo e consapevole nella vita sociale, far valere al suo interno diritti e bisogni riconoscendo quelli degli altri, le regole e le responsabilità.
- **Acquisire ed interpretare l'informazione:** acquisire ed interpretare criticamente l'informazione ricevuta nei diversi ambiti ed attraverso diversi strumenti comunicativi, valutandone l'attendibilità e l'utilità, distinguendo fatti ed opinioni e tra credenze e scienze

COMPETENZE ASSE MATEMATICO

- Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico;
- Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni;
- Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi ;
- Analizzare dati e interpretarli anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche;
- Sviluppare l'abitudine alla precisione del linguaggio matematico

ESTRATTO DALLA PROGRAMMAZIONE ANNUALE

40

ABILITÀ

- Costruire di quadrati magici di dimensione dispari
- Riconoscere quadrati magici
- Individuare elementi di una matrice
- Sommare algebricamente matrici
- Calcolare il prodotto di matrici
- Generare la matrice che rappresenta un'immagine in bianco-nero e i metadati ad essa associati
- Utilizzare Excel per gestire
 - differenti tipologie di variabili
 - formule matematiche
 - gestione degli indici
 - copia-incolla delle formule
 - trascinamento
 - riferimenti assoluti e relative
 - gestione della cella (allineamento, colore, sfondo,...)



Riflessioni conclusive

41

- Ottica inclusiva e non selettiva
- Distinzione scienza/credenza: competenze di cittadinanza
- Attività “giocose” ma con ampie possibilità di sviluppo
- *Utilizzo critico* degli strumenti informatici
- Interdisciplinarietà dell'unità didattica

Riflessioni conclusive

42

- ... come integrare il materiale sulle matrici e le trasformazioni in vista della 2° e della 3° classe?
 - ✓ semplificare la comprensione del metodo di Kramer in 2°
 - ✓ permettere l'introduzione vettoriale della retta nel Piano in 3°
 - ✓ facilitare la visione vettoriale della Geometria Analitica nello Spazio in 5°
- La parte finale sulle immagini può essere vista come un ponte con tematiche da sviluppare e approfondire in informatica

- ... domande, curiosità, suggerimenti...?

grazie!

- debora.impala@gmail.com
- giulia.ferrari@unito.it