VIII CONVEGNO NAZIONALE DI.FI.MA.

Torino 16 – 18 0ttobre 2017

Concetto di limite tra storia - filosofia - matematica

Relatori:

Roberta Carminati – Graziano Gheno

MI ILLUMINO DI IMMENSO

Il concetto di

limite

è alla base di una organica coerenza dei concetti di

infinito e infinitesimo.

Pertanto,

se vogliamo seguire

la nascita, lo sviluppo e la formalizzazione del concetto di limite

dobbiamo ripercorrere

la nascita e lo sviluppo delle problematiche relative all'infinitesimo e all'infinito.

Per seguirne le tracce passo a passo occorre partire dall’Antica Grecia.
Si illustra qui un quadro riassuntivo dei principali contributi dovuti a:

Scuola ionica → *Talete*

Scuola pitagorica

Scuola eleatica → *Parmenide*, *Zenone*

Scuola di Abdera → *Democrito*

Scuola di Cizico → *Eudosso*

Scuola di Atene → *Platone*, *Aristotele*

Scuola di Alessandria → *Archimede*

Keplero Galileo Cavalieri

Torricelli Pascal Fermat Newton Leibniz Cauchy Riemann

❖ Scuola ionica (primi decenni VI secolo a. C.)

- Va ricordato ***Talete*** come iniziatore del glorioso metodo geometrico che formerà il vanto dei Matematici Greci

❖ Scuola pitagorica (VI, V secolo a.C.)

- Per i *Pitagorici* il numero è una cosa reale e viene rappresentato come un insieme di sassolini e disegnato con raggruppamenti particolari di punti.

  - Si afferma la ***aritmogeometria***: ‘le cose sono numeri e viceversa’. Quindi, come i numeri sono costituiti da più unità, così le cose devono risultare composte da grandezze elementari indivisibili: le **monadi**.
    Sempre in numero finito!
  - In particolare, tutte le grandezze geometriche sono tra loro ***commensurabili.***

- Entra in scena ***l’infinito*** con la scoperta di grandezze tra loro ***incommensurabili*** e crolla la concezione secondo cui i segmenti sarebbero costituiti da un ***numero finito di punti***

- Per i Pitagorici e il mondo Greco questo ha due importanti conseguenze:

- ✓ *Oltre ai numeri esprimibili con simboli geometrico-aritmetici ce ne sono altri esprimibili solo per via geometrica.*

- ✓ *Se i segmenti sono costituiti da punti questi sono in numero **infinito***

❖ Scuola eleatica (inizio V secolo a. C.)

- Con ***Parmenide*** la geometria viene spogliata da ogni residuo di empirismo ancora visibile nella filosofia dei Pitagorici:
  'la sua critica tende in sostanza a stabilire che gli enti geometrici non possono definirsi che per astrazione, con un procedimento indefinito di idealizzazione, come limite del sensibile. Ora questa affermazione costituisce il primo riconoscimento del carattere infinitesimale dei concetti della geometria'.
  [E. Rufini]

- Fondamentali poi le argomentazioni di ***Zenone*** :
  *'i paradossi che il filosofo mette in luce sono quelli che si ritrovano sulla via dell'analisi infinitesimale. La riflessione che riconosce l'idealità degli enti geometrici scopre, insieme al regno del pensiero, il mondo **dell'infinito**'*
  [F. Enriques]

- In particolare con ***Zenone:***

- un segmento si può ***decomporre*** in un numero ***infinito*** di parti che diminuiscono continuamente fino a diventare più piccole di un qualsiasi altro segmento, piccolo a piacere.

- Questo fatto, ossia la possibilità di poter suddividere un segmento in un numero infinito di parti, può essere colta come la nascita ***del concetto di limite*** e una delle prime idee di un procedimento infinitesimale.

- È implicita, in relazione alla ricerca delle origini del concetto di limite in Zenone, la considerazione che ***non*** si possono concepire come ***"raggiunte" le unità ultime e indivisibili.***

❖ Scuola di Abdera (inizio IV sec. A.C.)

- ***Democrito*** studia il più grande e coerente sistema atomistico dell'antichità, il primo tentativo di una spiegazione meccanicistica dell'universo.

- Accanto alla
  infinita *divisibilità delle grandezze geometriche*
  egli pone la
  finita *divisibilità del mondo fisico*
  che trova appunto nell'atomo un baluardo invalicabile.

- Ponendo dunque un *termine alla infinita divisibilità fisica* sostenuta da Zenone, ***Democrito*** dà un contributo notevole a*lle ricerche geometriche infinitesimali*.

- Infatti ***Democrito*** combina la

finita divisibilità fisica

con la

infinita divisibilità geometrica

semplicemente scomponendo le figure geometriche, come coni e piramidi, in una

***infinità* di lamine**

infinitamente sottili

aventi lo spessore fisico di … **un atomo**!

- Sono gli ***'indivisibili'*** di Democrito che saranno utilizzati da Archimede nel 'Metodo'.

*" se si taglia un cono con un piano parallelo alla base e **infinitamente vicino** alla base che cosa si deve pensare delle superfici delle sezioni, che esse sono uguali o disuguali? Giacché se fossero disuguali farebbero il cono irregolare, quasi avesse molti ripiani, come una scalinata e molte scabrosità; se invece fossero uguali le sezioni stesse sarebbero uguali e potrebbe sembrare che il cono avesse le stesse proprietà del cilindro, cioè di essere formato di circoli uguali e non disuguali il che è oltremodo assurdo."* [Plutarco]

- Questo ragionamento, basato su di una concezione di tipo pitagorico-atomistica delle figure geometriche, in cui sfugge il significato profondo di infinita divisibilità di un segmento, porta inevitabilmente a paradossi e vere contraddizioni.

- Il superamento di queste aporie è l'opera lenta e complessa di generazioni di matematici e soprattutto filosofi.

- In questo contesto di incertezza e smarrimento un peso non indifferente è la richiesta di assoluta chiarezza introdotta con tanta energia da ***Platone*** **e** ***Aristotele*** che comporta un cambio di mentalità e un trapasso rivoluzionario dalla concezione

pitagorico-democritea

a quella

platonico-aristotelica

- *Per i primi tutte le figure geometriche sono costituite da elementi ultimi forniti di una esistenza effettiva ed effettivamente raggiungibile, per gli altri i pretesi elementi ultimi*

non devono essere oggetto di speculazione!

❖ Scuola di Cizico (IV secolo a. C.)

- È la prima scuola greca in cui la ricerca matematica acquista una sua autonomia rispetto alla filosofia.

- Il più illustre maestro è ***Eudosso di Cnido***, colui che contribuisce a stabilire i metodi rigorosi nella scienza. Ad Eudosso viene attribuita infatti sia la *teoria delle proporzioni* che il *metodo di esaustione*.

- La *teoria delle proporzioni*, esposta in def. [V, 4] degli Elementi di Euclide, permette di superare in modo logicamente rigoroso la difficoltà derivata dalla scoperta pitagorica di grandezze tra loro incommensurabili.

- *Il metodo di esaustione è* un potente e rigoroso metodo di dimostrazione di proposizioni in cui entra in gioco l'infinito e trova immediata applicazione nel calcolo di aree e di volumi delle più complesse figure geometriche.

In particolare il *metodo di* esaustione si basa:

- sul postulato di Eudosso-Archimede;
- sulla Prop.[X, 1] degli Elementi che esprime il concetto, già affrontato da Zenone, di come nella divisione di grandezze, *si possa procedere tanto oltre da ottenere grandezze minori di una qualsiasi grandezza assegnata.* ***Secondo il linguaggio dei limiti, infinitesime.***

- È un procedimento infinitesimale che corrisponde all'odierno metodo delle successioni convergenti.
- *Elimina* ogni riferimento *ai pretesi ultimi elementi* ed è quindi logicamente impeccabile
- Manca il concetto esplicito di limite e quindi il risultato viene dimostrato solo indirettamente ricorrendo alla dimostrazione per assurdo
- Per essere applicato si deve quindi conoscere la tesi, avuta mediante tecniche di tipo euristico, spesso pure sconosciute, oppure basata sull'intuizione e, comunque, fondata su processi non considerati sufficienti per garantire la verità del risultato ottenuto.

❖ La scuola di Atene (IV secolo a. C.)

- Due sono le figure di filosofi che hanno caratterizzato questo periodo e condizionato lo sviluppo non solo del pensiero filosofico ma di tutta la cultura in senso lato nel mondo occidentale fino a tutto il Rinascimento e … oltre: ***Platone e Aristotele***.

- ***Platone*** *«… dette un impulso immenso a tutta la scienza matematica e in particolare alla geometria per l'appassionato studio che vi dedicò e che ha reso noto sia riempiendo i suoi scritti di ragionamenti matematici, sia risvegliando dovunque l'ammirazione per questi studi in coloro che si dedicano alla filosofia. …Questi (i matematici) convivevano tutti insieme nell'Accademia e conducevano in comune le ricerche».[Proclo]*

- L'ipostatizzazione delle idee platonica dava alle figure geometriche un ruolo privilegiato all'interno della conoscenza: è a Lui certamente che si deve la restrizione delle costruzioni geometriche con riga e compasso. Infatti riferisce Plutarco di come Platone rimanga indignato dal modo di procedere di alcuni matematici che usavano schemi visivi e meccanici nelle argomentazioni geometriche «… quasi che distruggessero e corrompessero ciò che vi era di buono nella geometria: in tal maniera essa abbandonava infatti i concetti astratti per scendere nel mondo sensibile…»

- ***Aristotele*** sviluppa la teoria della potenza e dell’atto

- ✓ La potenza indica la possibilità della materia di subire un cambiamento
- ✓ L’atto indicava l’esistenza stessa dell’oggetto

- In particolare, Aristotele sostiene che l’infinito si può presentare in due forme:

l'infinito in atto : *è un'infinità compiuta, e si presenta nella sua totalità in un momento ben determinato;*

l'infinito in potenza : *è un'infinità distribuita nel tempo, simile a un processo che non ha mai fine, cioè qualcosa che è sempre accrescibile.*

- Per Aristotele *l’infinito non si trova in atto* entro nessun numero effettivamente dato, ma *esiste in potenza* nella serie stessa dei numeri.

- Analogamente per le grandezze geometriche: esse non costituiscono una somma di *infinità attuale di ‘elementi ultimi’ ma* contengono *l’infinito in potenza* perché sono divisibili *in parti sempre ulteriormente divisibili*.

- ❑ Per Aristotele in matematica si può ottenere **l’infinito potenziale** in due modi:

- ✓ *Per addizione:* consiste in un processo sommatorio senza termine, in cui a una parte qualsiasi di una data grandezza si aggiungono successivamente altre quantità, senza arrivare mai a una conclusione ottenendo una ***grandezza infinita***

- ✓ *Per divisione:* consiste nel dividere una grandezza in due parti, nel sottrarne una e nell'operare sull'altra allo stesso modo, con un procedimento che non ha mai fine ottenendo una ***grandezza infinitesima***

❖ Scuola di Alessandria (III, II secolo a.C.)

- La matematica dei Greci raggiunge la sua completa maturità per il rigore con ***Euclide*** e per la vastità degli argomenti trattati con ***Apollonio*** e ***Archimede***.

- E siamo arrivati ad ***Archimede*** *figura chiave nel nostro percorso*.

- In tutte le dimostrazioni di carattere infinitesimale due sono i fari che ***«lumeggiano»*** con assoluta sicurezza nelle sue opere:

1. La ***teoria delle proporzioni*** che permette di relazionare tra loro più grandezze, siano esse commensurabili o incommensurabili

2. Il ***metodo di esaustione*** per le dimostrazioni in cui entra in gioco l'infinito. È un metodo formalmente ineccepibile ma con due notevoli limitazioni:

- per poterlo applicare si deve conoscere la tesi da dimostrare;
- è assolutamente non euristico.

- Dunque ***Archimede*** in tutte le dimostrazioni infinitesimali usa in modo brillante il metodo di esaustione, escogitando di volta in volta strategie e percorsi a dir poco stupefacenti. Ma per utilizzare tale metodo doveva preventivamente conoscere la tesi, ottenuta come Lui stesso ci dice:

- ✓ Utilizzando analogie
- ✓ Fidandosi delle sue intuizioni
- ✓ Confidando nella semplicità delle leggi che regolano le relazioni tra grandezze
- ✓ *Ricorrendo al* ***'Metodo meccanico'***

Il «Metodo sui sistemi meccanici»

È un'opera di Archimede considerata perduta e ritrovata solo nel 1906 dal filologo Heiberg. Tale scoperta costituisce un fatto storico di rilevanza eccezionale soprattutto per il ritrovamento della ***copia di una lettera introduttiva*** in cui Archimede illustra ad Eratostene il suo geniale processo di ricerca che sta a monte del suo percorso logico formale.

Archimede a Eratostene salute

- *Vedendoti poi diligente ed egregio maestro di filosofia e tale da apprezzare anche nelle matematiche la teoria che ti accada di considerare, decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni di matematica per mezzo della meccanica.*

- *Sono persuaso che questo metodo sia non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi.*

- *E infatti alcune delle proprietà che a me dapprima si sono presentate per via meccanica sono state più tardi da me dimostrate per via geometrica*

- *poiché la ricerca compiuta per mezzo di questo metodo non è una vera dimostrazione: è poi più facile, avendo già ottenuto con questo metodo il risultato…qualche conoscenza delle cose ricercate, compiere la dimostrazione, piuttosto che ricercare senza alcuna nozione preventiva.*

- ***Tale 'Metodo' consiste nel:***
  - ✓ ***confrontare grandezze tra loro omogenee***
  - ✓ ***considerare le superfici composte da una <u>somma di un numero infinito di linee infinitamente sottili e i volumi …</u>***

- ***Potrà (con qualche accorgimento) essere considerata una dimostrazione!***

- ***Ha fatto alcune delle sue scoperte con questo metodo.***
  (legame tra segmento parabolico e triangolo)

- ***..Archimede si accorge di essere uscito dalle righe con quella interpretazione democritea sugli indivisibili e corre subito a parare il colpo …***

- *Perciò anche di quei teoremi, dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione, cioè che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide è la terza parte del prisma aventi stessa base e stessa altezza, non piccola parte del merito va attribuita a Democrito, che per primo fece conoscere queste proprietà delle figure suddette, senza dimostrazione.*

- ***Esplicito riferimento a Democrito e alla sua infinita divisibilità geometrica e finita divisibilità fisica. È straordinario che Archimede sia riuscito a sfruttare il pensiero di Democrito in modo originalissimo per conseguire risultati concreti e soprattutto per l'importanza decisiva nello sviluppo della scienza.***

- *A noi accade poi che anche il ritrovamento del teorema ora pubblicato è avvenuto similmente a quelli prima detti, ho voluto quindi, avendolo scritto, pubblicare quel metodo, sia perché ne avevo già prima parlato, sia perché son convinto porterà non piccola utilità nella matematica: confido infatti che alcuni dei matematici attuali o dei futuri, essendo stato loro mostrato questo metodo, ritroveranno anche altri teoremi da noi non ancora escogitati.*

- ***In questa affermazione Archimede è preveggente. Il procedimento descritto da Archimede risulta del tutto analogo a quello che verrà adottato dagli analisti del 1600, e l'interessante è che essi lo dovranno inventare una seconda volta dato che questa Opera rimase loro assolutamente sconosciuta, anzi lo dovranno in un certo modo contrapporre alle rigorose dimostrazioni archimedee condotte con l'esaustione***

Conclusione

- In questa lettera appare evidente come Archimede nelle sue Opere fondi insieme tre momenti ben distinti che compongono il tessuto filosofico-matematico del suo periodo:
  * **Le linee guida dettate da Aristotele per la ricerca matematica**
  * **La concezione democritea che fa una sottile distinzione tra figura geometrica e figura fisica**
  * **L'impostazione infinitesimale di Eudosso nelle dimostrazioni.**

- È doveroso rimarcare come abbia avvertito che la ricerca matematica non poteva essere costituita né dal puro e semplice metodo di esaustione, né dal puro e semplice metodo degli indivisibili. Anzi abbia saputo costantemente avvalersi di entrambi, non confondendoli però tra loro, ma integrando il contributo dell'uno con il contributo dell'altro.

- Dopo i fasti dovuti ad ***Archimede*** (200 a.C) poche le scoperta nella matematica, fino al 1500.

Quali le cause? …

- Quando riparte l’interesse per la ricerca matematica il centro motore delle scoperte si sposta nel cuore dell’Europa.

- A partire dal 1500 due sono le novità da segnalare:
  1. Il rapido sviluppo degli studi algebrici in termini di linguaggio, metodi, simboli e risultati.
  2. L’invenzione della stampa, che porta nel continente europeo un rifiorire di studi classici: in matematica le Opere di **Archimede** vengono tradotte senza **Il Metodo**

- Il rapido progredire delle scienze investe anche il **metodo scientifico**: si passa ad una scienza che elabora procedure e metodologie indipendenti dalla tradizione filosofica e teologica…. e i risultati non si fanno attendere!

- A partire dalla **rivoluzione copernicana** la scienza cambia decisamente registro: deve indagare i rapporti tra le cose e deve esprimerli attraverso misurazioni.

- Per la ***matematica*** si aprono nuovi orizzonti:
  - indagare la realtà;
  - essere modello metodologico per ricerche strettamente quantificabili.

- La ricerca di nuove vie facili, rapide e feconde in ambito infinitesimale comincia ad interessare ben più che la sicurezza delle vie di accesso.

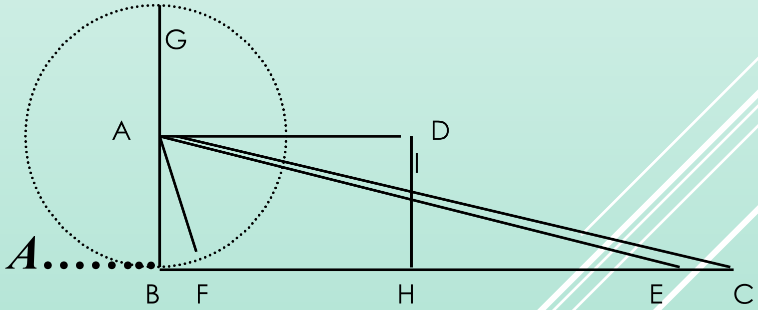
- Strenuamente i difensori del rigore si opposero a questo nuovo corso ma alla fine **finirono per soccombere.** Emblematica a proposito l'aspra disputa tra il Gesuata Cavalieri e il Gesuita Guldino. Le scoperte anche se inizialmente inesatte e imprecise, riuscirono nel volgere di pochi decenni a condurre a risultati generali e concreti

1615
'nova stereometria doliorum' *di* J. Keplero

- *Keplero* fu il primo matematico del '600 ad **abbandonare** senza compromessi **il metodo classico di esaustione** e le sue difficili dimostrazioni per assurdo.

- Lo sostituì con ragionamenti diretti sugli infiniti e infinitesimi, passando quindi senza mezzi termini ad uso disinvolto dell'infinito in atto!

La circonferenza del cerchio BG ha tante parti quanti punti, se ne pensino infinite.
Ciascuna di esse è considerata come base di un triangolo isoscele, di lati AB:
cosicché si può pensare il cerchio come formato da infiniti triangoli aventi tutti vertici in A……..



- Questi metodi sviluppano una matematica feconda ma non rigorosa che comunque nel volgere di cinquant'anni arriverà a definire le ***basi del calcolo differenziale***

- Controindicazioni al lavoro di Keplero: ***non ha un metodo.***
  Però spiana la strada all'uso generalizzato degli ***indivisibili***

- ***G. Galileo*** applica il metodo degli indivisibili alla fisica. Il nuovo metodo di indagine, l'osservazione e la sperimentazione, entrano nel campo dell'analisi matematica.

- ***B. Cavalieri*** per primo cerca di dare una sistemazione logica del nuovo metodo nella sua *«Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota»* del 1635.
  - Idea base del suo lavoro:
  - ✓ una generica superficie piana è costituta dalla totalità delle corde (*omnes lineae figurae*)
  - ✓ un solido è costituito dalla totalità delle sezioni (*omnia plana solidi*)

1637

' Discours de la méthode '

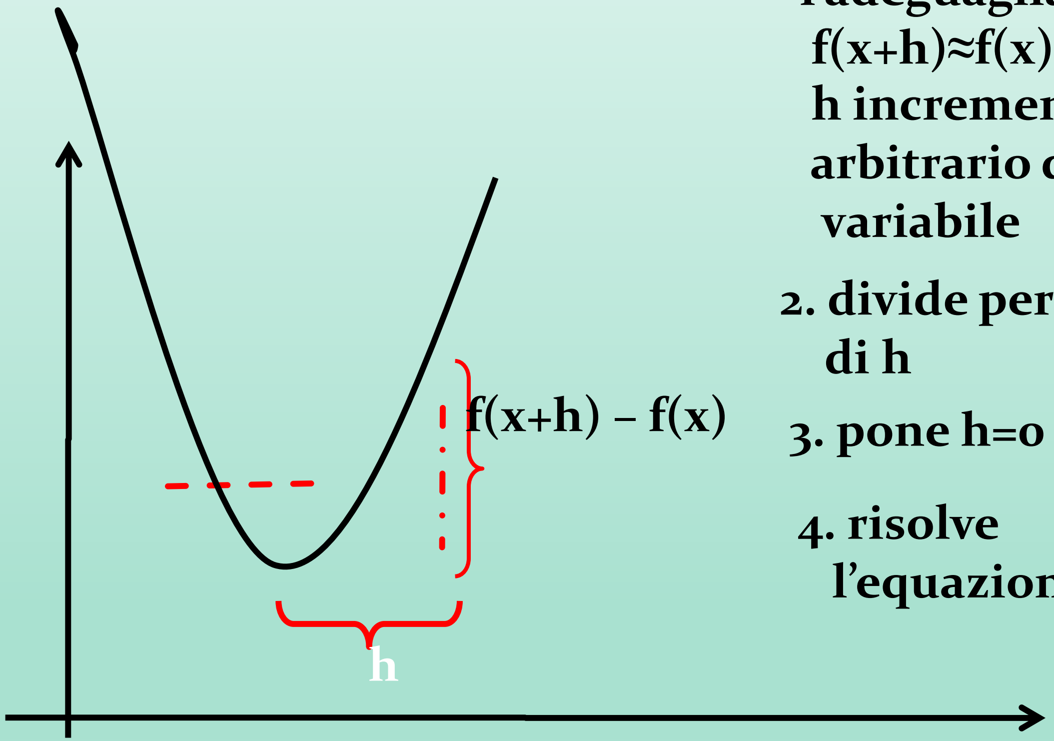
di

René des Cartes

- Vengono definiti i contorni del ***metodo scientifico***
- La sua ***Géométrie***:
  - permette ***' l'algebrizzazione della geometria '***
  - introduce il concetto *di* ***' dipendenza tra due variabili '***

❖ ***P. De Fermat*** apre un nuovo orizzonte di ricerca: gli incrementi

➢ Tale metodo si basa sul fatto che una funzione y = f(x), in un intorno di un valore x in cui ammette massimo o minimo, diventa stazionaria. Questo il suo algoritmo:



1.Considera l'adeguaglianza f(x+h)≈f(x) con h incremento arbitrario della variabile

2. divide per la potenza minima di h

3. pone h=o

4. risolve l'equazione

Esempio

Se f(x) = x^2

(x+h)^2=x^2

x^2+2hx+h^2-x^2=0

2xh+h^2=0

2x=0

x=0

➢ In Fermat per la prima volta, anche se in modo inespresso, si nota **un primo tentativo di formulare il concetto di limite**

- ***E. Torricelli*** *è* stato un fervido sostenitore del metodo degli indivisibili, ne diede nuove applicazioni, indicò le cautele da adottare per non cadere in errori, e li estese agli indivisibili curvilinei.

“Che poi la geometria degli indivisibili sia un’invenzione tutta nuova , non oserei certo dire.
Crederei piuttosto, che gli antichi geometri si siano valsi di questo metodo per scoprire i Teoremi più difficili, e che poi, nella dimostrazione, abbiano preferito un altro metodo, sia per nascondere i segreti dell’arte, sia per non offrire, ad invidiosi detrattori, alcuna occasione di critica.

E’ comunque certo che questa geometria consente un mirabile risparmio nella scoperta di nuove verità e permette di stabilire innumerevoli e quasi imperscrutabili teoremi con dimostrazioni brevi, dirette, affermative. Ciò che non può per nulla essere fatto con i metodi degli antichi.

Essa è veramente la via regia nel ginepraio delle matematiche, che per primo aprì e spianò, per il pubblico bene, l’ideatore di mirabili invenzioni, Cavalieri.”

Gli indivisibili di Torricelli

- hanno le <u>stesse dimensioni della figura cui sono associati</u>.

- gli **indivisibili di linea** <u>non</u> sono punti, ma elementi lineari che hanno lunghezze paragonabili per rapporto, sebbene infinitesime;

- gli **indivisibili di superficie** <u>non</u> sono segmenti ma elementi d'area e come tali paragonabili tra loro non solo perché hanno lunghezza finita, ma anche perché hanno area infinitesima e le loro larghezze, benché infinitesime, hanno fra loro rapporti paragonabili a rapporti fra grandezze finite;

- gli **indivisibili di volume** <u>non</u> sono superfici ma elementi di spazio i cui spessori, sebbene infinitesimi, sono paragonabili tra loro.

"L'indivisibile non è più il risultato di una sezione ,

ma

è ottenuto come vestigium , residuo ultimo della figura."

❖ ***B. Pascal***

Pascal va oltre Torricelli:

"Tutto ciò che è dimostrato mediante la vera regola degli indivisibili sarà dimostrato pure con il rigore degli antichi: questi due metodi differiscono solo per le diverse modalità di esprimerli…"

- Nel suo " traité des sinus " del 1664
  - Introduce il ***'triangolo caratteristico';***
  - *Intravvede* ***il differenziale;***
  - arriva a una fase avanzata del ***concetto di limite.***

" … proprio là dove Pascal si trovò gli occhi sbarrati come per una specie di fatalità, Leibniz scorge la possibilità di una nuova generalizzazione che implicherà essa stessa la necessità di esplicitare ciò che l'intuizione sottintendeva, di tradurre gli elementi infinitamente piccolo in simboli analitici" [L. Brunschvige]

- ***I. Newton* un gigante sulle spalle di giganti.**

- La sua è un'analisi infinitesimale di tipo cinematico.
- Nel 'biennium mirabilissimum' 1665-67 elabora il Nuovo Calcolo esposto in

- ✓ *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* composta nel 1669, pubblicata nel 1711
- ✓ *Methodus fluxionum curvarum* composta nel 1671 pubblicata nel 1742
- ✓ *De quadratura curvarum* composta nel 1676 pubblicata nel 1704

Facciamo attenzione alle date di pubblicazione in quanto queste saranno uno dei motivi che innescherà la disputa con Leibniz sulla paternità del Nuovo Calcolo.

- Con il metodo ***'delle fluenti e delle flussioni'*** introduce le … derivate: ***" … ebbi l'illuminazione per questo mio metodo dal modo di Fermat di tracciare le tangenti, ma io lo resi generale applicandolo ad equazioni astratte."***
- Una volta trovate le flussioni di una fluente, osserva che non solo si possono trovare le flussioni di una flussione e così via, ma che il problema si può invertire! … e
- … arriva così al ***teorema dell'inversione*** gia intravvisto sia da Torricelli che da Barrow.

Vediamo dunque come Newton partendo da un fluente F(x,y) =0 calcola la flussione

1. sostituisce x con $\mathbf{x + h\dot{x}}$

   y con $\mathbf{y + h\dot{y}}$

   dove $\dot{\mathbf{x}}$ e $\dot{\mathbf{y}}$ rappresentano le velocità di accrescimento di x e y

   h intervallo di tempo 'infinitamente piccolo'

2. sviluppa F($\mathbf{x + h\dot{x}}$, $\mathbf{y + h\dot{y}}$) = 0
3. divide l'espressione ottenuta per h
4. **trascura** i termini che contengono h
5. individua il rapporto tra le due flussioni

Esempio:

Sia y-x^2=0

$\mathbf{y + h\dot{y}} =$ ($\mathbf{x + h\dot{x}}$)^2

$$y + h\dot{y} = x^2 + 2hx\dot{x} + \dot{x}^2h^2$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2h$$

$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

- In questo algoritmo Newton divide i termini dell'espressione per h e poi pone h=0 come aveva fatto Fermat. Ma, mentre Fermat non dà nessuna spiegazione del passaggio, Newtton aggiunge «….. **Avendo supposto h infinitamente piccolo»**
- Ora in Newton si può notare una piena coscienza del concetto di limite anche se non ancora espressamente definito.

- ***G. Leibniz*** copre un ruolo fondamentale nel percorso che porta alla nascita del Nuovo Calcolo se non altro per il fatto che il formalismo cui siamo abituati in analisi è in buona misura opera sua

‘ ai simboli è da chiedere che si prestino alla ricerca, ciò succede quando esprimono in modo conciso e quasi dipingono l’intima natura delle cose, perché essi allora risparmiano mirabilmente lo sforzo del pensiero’

- Inizia il suo percorso nel discreto studiando particolari successioni numeriche.
- Definisce il suo differenziale, come *“differenza tra elementi successivi di insiemi discreti”*.

  In particolare, considerata una successione qualsiasi,
  - indica con ***d*** un operatore differenza;
  - applica l’operatore differenza tra un termine generico della successione e il successivo;
  - pone uguale a ***dx*** questa differenza e chiama *dx* ***‘ differenziale di x’.***

- Quando nel 1675 passa dal discreto al continuo il suo differenziale dx continua a mantenere il significato originario di operatore differenza e diventa una differenza di ascisse.
- Quindi il passaggio dal discreto al continuo, dal finito all'infinitesimo, avviene per il "filosofo dell'ottimismo" senza particolari difficoltà, in quanto il suo infinito è pur sempre un *infinito numerabile* e non l'infinito del *continuo.* Pe l'appunto si parla del ***' continuo leibniziano!'***

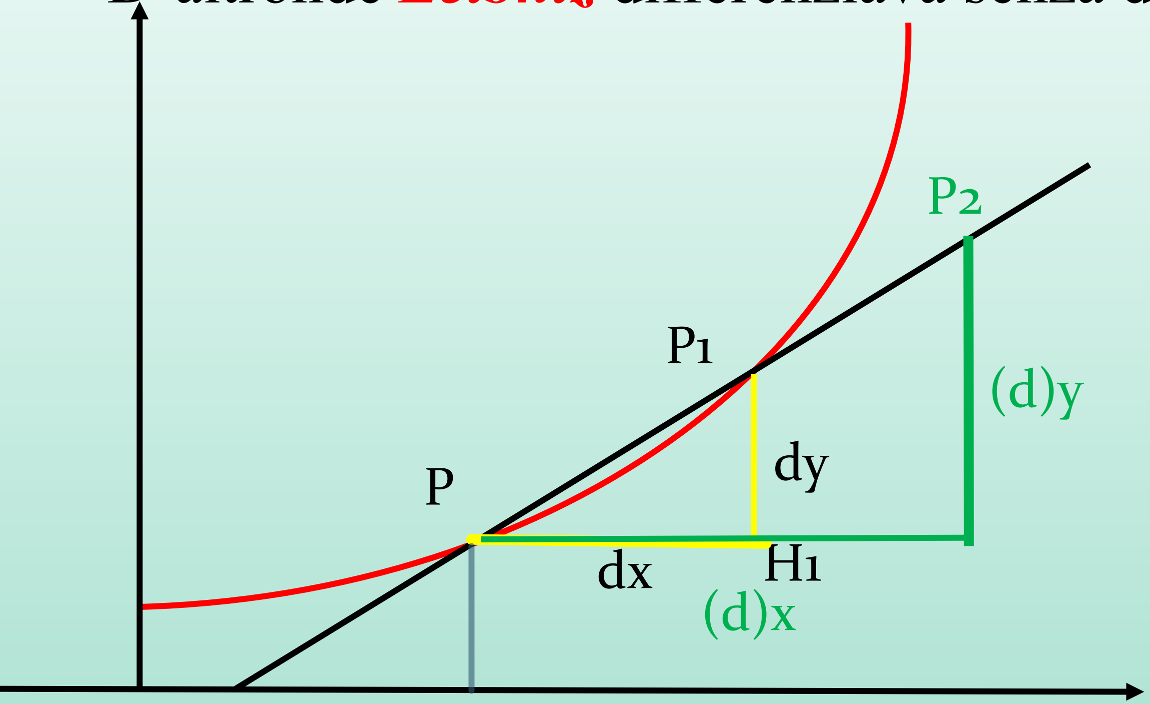
Riassumendo:

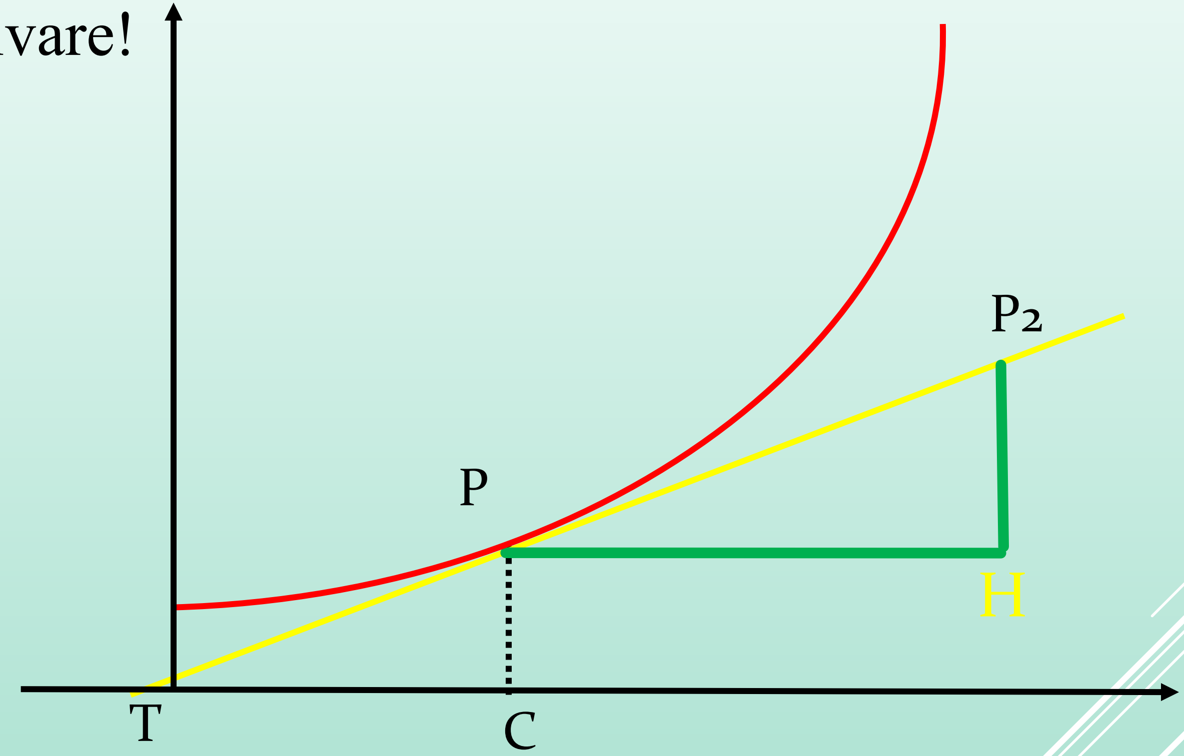
- Il suo ***differenziale dx*** diventa:
  - lo spessore del suo ***indivisibile***;
  - una grandezza infinitamente piccola e attuale!
  - Non viene mai definito esplicitamente;
  - Nell'infinitamente piccolo Leibniz costruisce infiniti ' gradi ' di piccolezza, ossia il differenziale secondo, terzo e così via.

Insomma nell'infinitamente piccolo continuò a lavorare con mentalità aritmetica!

- Lavorando sui suoi differenziali Leibniz dopo essersi imbattuto nel triangolo caratteristico di Pascal arriva alla $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$. ***La nostra derivata!***

D’altronde ***Leibniz*** differenziava senza derivare!





$dy / dx = (d)y / (d)x$

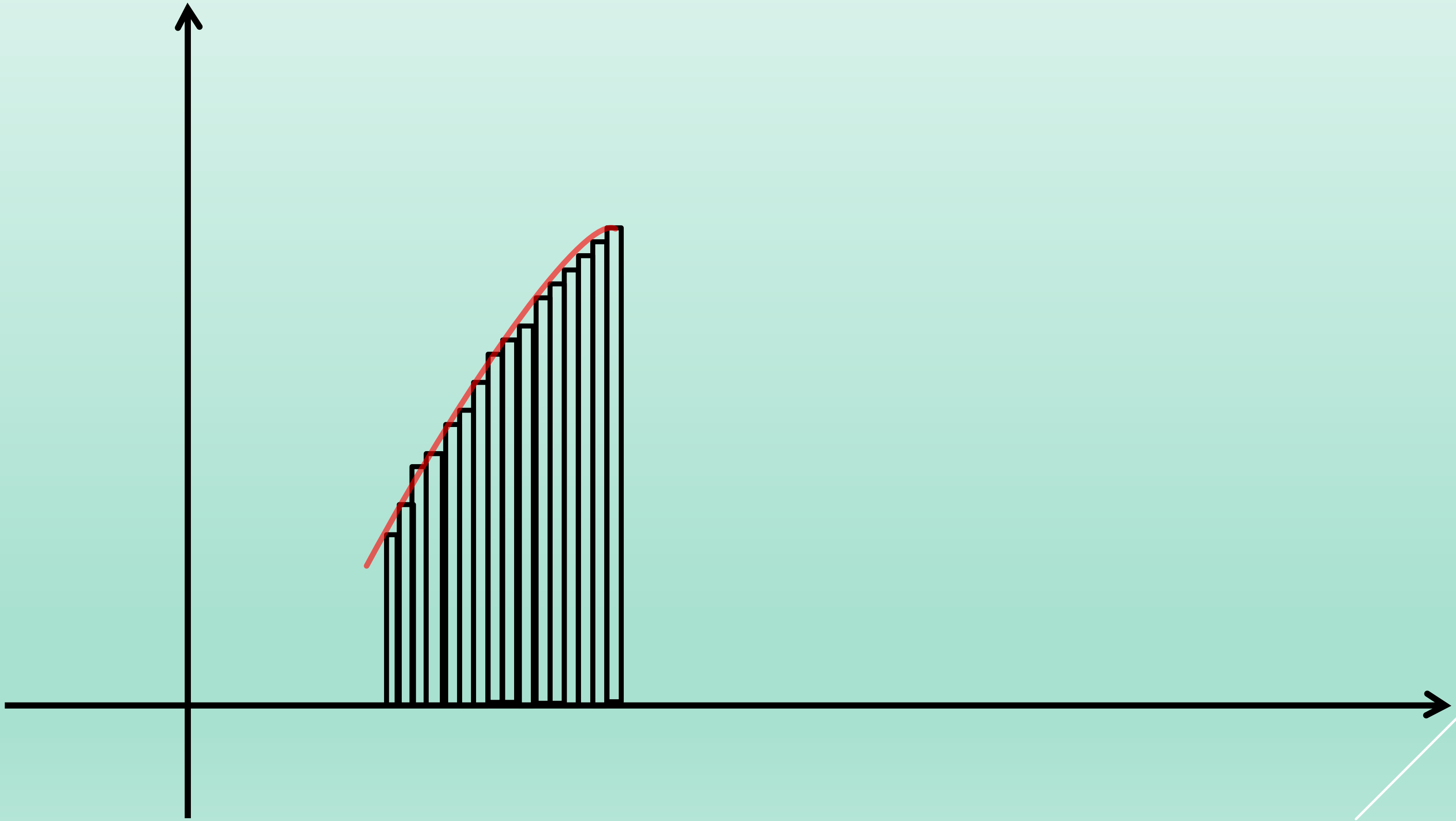
$dy / dx = y / s$

con $s = TC$

$\boldsymbol{\alpha = PTC \longrightarrow PC / TC = \tan\alpha = f'(x)}$

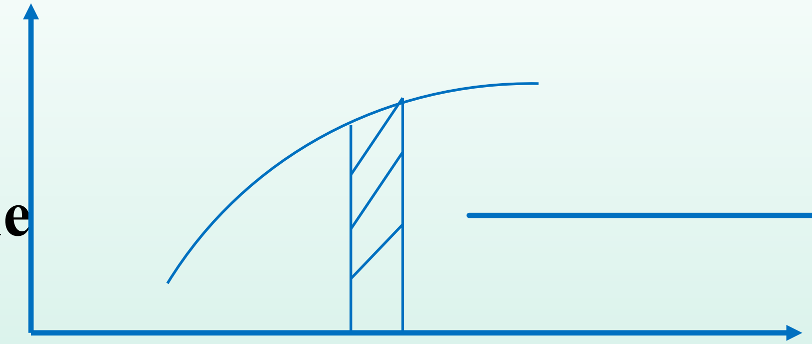
$\boldsymbol{dy / dx = f'(x)}$

- A partire dal 1673 si occupa pure di quadrature. Prendendo spunto da Cavalieri considera il continuo composto da infiniti indivisibili e ricordando ‘ le traité des sinus ’ di Pascal arriva a concepire f(x)dx come rettangolini di base dx e altezza f(x)



E indica la somma di tutti i rettangolini con $\int f(x)dx$

- **Problema dell’inversione**



$\boxed{f(x)dx}$

- Data f(x) e l’elemento f(x)dx afferma che esisterà una F(x) tale che dF = f(x)dx.
- Ma *dF* è una *“differenza leibniziana”*, per cui la somma delle *f(x)dx* diventa la somma delle differenze dF.
- Dividendo pertanto un intervallo [a,b] in n intervalli e indicati con

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

si avrà che i successivi valori di dF saranno:

$$F(x_1) - F(a), \quad F(x_2) - F(x_1), \quad F(x_3) - F(x_2), \quad \ldots, \quad F(b) - F(x_{n-1}).$$

La somma di questi dF è $F(b) - F(a)$

- Ma ***allora***

$$\int f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Problema ancora aperto: La natura degli indivisibili

- Si può dividere la storia del calcolo infinitesimale da questo momento fino al XIX secolo in due grandi filoni di ricerca:
  - da una parte il Nuovo Calcolo posto nelle mani dei ***Bernoulli***, di ***Eulero***, di ***D'Alambert*** lascia intravvedere uno sterminato campo di ricerca;
  - dall'altro con ***De l'Hopital***, ***Rolle***, ***Lagrange*** si opera per precisare e consolidare i principi sui quali tale strumento è fondato.

- Ma è solo nell'ottocento che si arriva a definire in modo rigoroso i concetti base del nuovo calcolo. I principali autori di questa svolta sono ***K. Gauss***, ***N. Abel*** e ***A. Cauchy***.

- È infatti *Cauchy* che nel 1822 ***formalizza la definizione del concetto di limite***, chiave di volta di tutta l'impalcatura che sorregge il calcolo sublime. Con la definizione di limite si passa poi a definire
  - Il concetto di infinito
  - Il concetto di infinitesimo
  - La definizione di derivata
  - La definizione di integrale di una funzione.

Definizione di limite: quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fisso in modo da finire per differirne tanto poco quanto si vuole quest'ultimo valore è chiamato limite di tutti gli altri.

Definizione di infinitesimo: quando i valori numerici successivi di una stessa variabile decrescono indefinitamente in modo da divenire minori di qualsiasi numero assegnato questa variabile diviene ciò che si chiama infinitesimo.

Definizione di infinito: quando i valori numerici successivi di una stessa variabile crescono indefinitamente in modo da divenire maggiori di qualsiasi numero assegnato questa variabile diviene ciò che si chiama infinito.

- In queste definizioni Chauchy fonde mirabilmente insieme:
  -- un preciso riferimento al concetto di funzione
  -- la Prop. [X, 1] degli elementi
  -- l'infinito in potenza di aristotelica memoria

- A dire il vero rimane ancora un alone di vaghezza con il riferimento
  ' *… in modo da differirne tanto poco…* '

- Per ritrovare la definizione di limite e poi di integrale che i nostri alunni ritrovano nei loro libri di analisi dobbiamo aspettare K. Weirstrass e B. Riemann.

Definizione di Limite:

"Se data una grandezza ε esiste una η_0 tale che per ogni η con $0 < \eta < \eta_0$ la differenza $f(x_0 \pm \eta) - L$ sia minore di ε in valore assoluto, allora L è il limite di f(x) per x che tende a x_0".

- In questa definizione notiamo che:
- ✓ il nostro caro vecchio punto reale è diventato un

… intorno.

- ✓ e il nostro rassicurante infinito in potenza è diventato un

… infinito in atto

E quindi ……

MI ILLUMINO DI IMMENSO

Bibliografia

G. Bagni, Storia della matematica, Ed. Pitagora
E.Bell, I grandi matematici, Ed. Sansoni
C. Boyer, Storia della matematica, Ed. Sansoni
U. Bottazzini, O. Freguglia, L. Toti Rigatelli, Fonti per la storia della matematica, Ed. Sansoni
F. Enriques, Questioni riguardanti le matematiche elementari, Ed. Zanichelli
G. Giorni, Compendio di storia delle matematiche, Ed. Internazionale
W. Hatcher, Fondamenti della matematica, Ed. Boringhieri -
G. Castelnuovo, Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna, Ed. Feltrinelli
M.Kline, Storia del pensiero matematico, Ed. Feltrinelli
P. Dupont, Appunti di storia dell'analisi infinitesimale, Università degli studi di Torino
R. Carminati- G. Gheno, Suspiciendo despicio, Ed. Artistica Bassanese