Sperimentare la logica delle proposizioni con l'origami

Maria Luisa Spreafico
Dipartimento di Scienze Matematiche
Politecnico di Torino

Stefania Serre
Scuola Internazionale Europea Statale
"Altiero Spinelli" di Torino

Torino, 17 Ottobre 2017

Origami per la logica delle proposizioni

Scopo: creare un percorso per formulare e organizzare una serie di risultati matematici

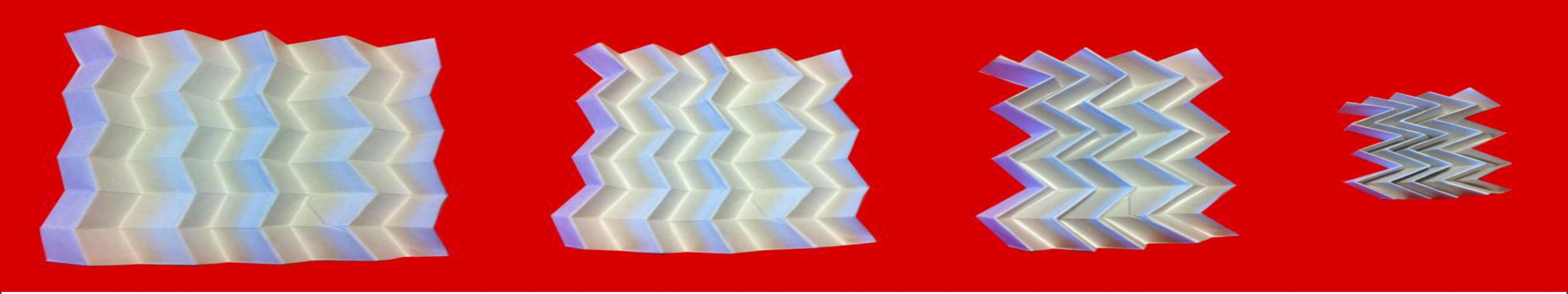
- Step 1 - Sperimentare «con le mani»
- Step 2 - Formulare enunciati (C.N, C.S., formulazioni equivalenti, criteri, teoremi di esistenza)
- Step 3 – Dimostrare o creare controesempi
- Step 4 – Riflessione su carattere locale e globale di un risultato

Origami per la logica delle proposizioni

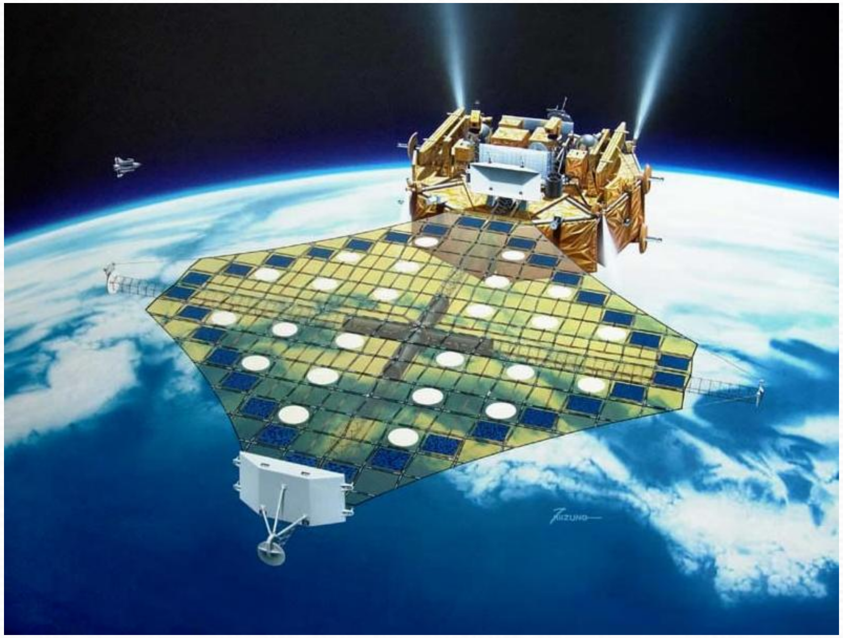
Origami piatti: la motivazione

Brigham Young University

https://youtu.be/P_ezsOeX5mQ



Origami piatti: la motivazione

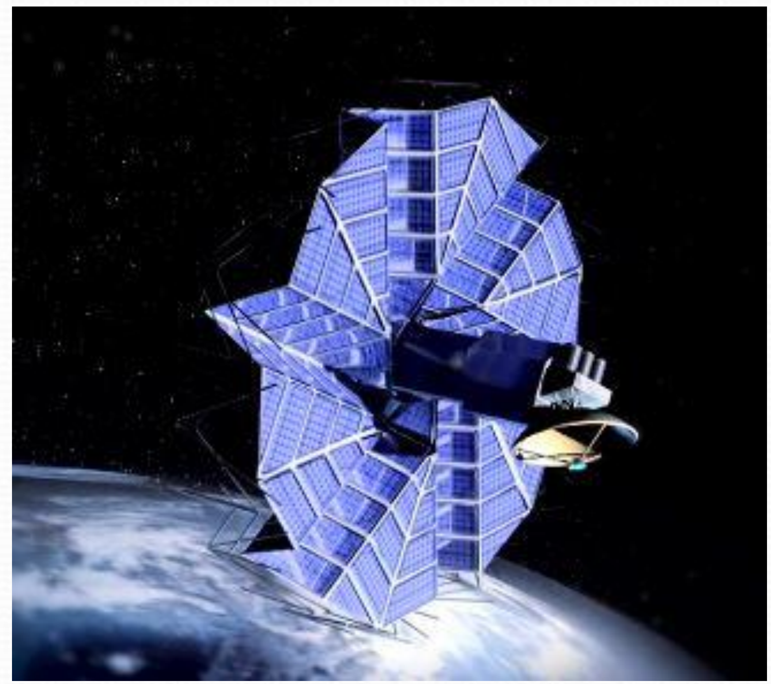


Mappa di Koryo Miura
Miura-ori map

https://www.youtube.com/watch?v=TUGGd94aMSI

Brigham Young University
NASA Jet Propulsion Laboratory

Origami piatti: la motivazione

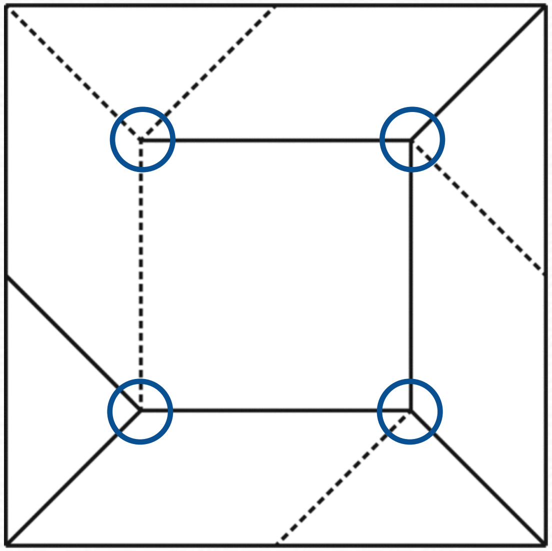


Robert Lang
Larry Howell

https://www.youtube.com/watch?v=DJ4hDppP_SQ

Origami piatti: il problema

Studiando il crease-pattern di un origami
è possibile decidere se sarà un origami piatto?



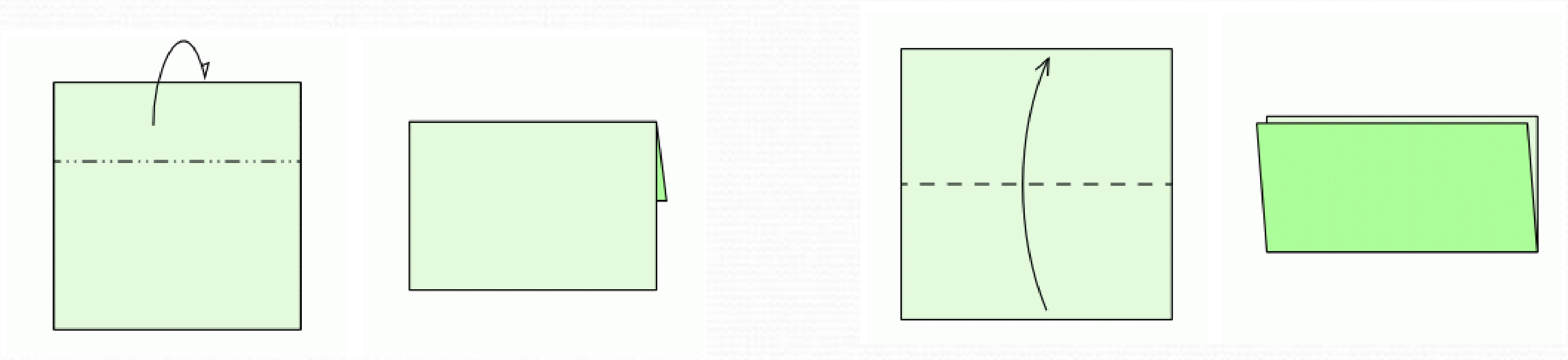
Origami piatti: dal semplice al complesso

- Vertice: punto in cui concorrono più pieghe
- Dal semplice al complesso: numero di vertici dell'origami piatto.
- Nessun vertice: ventaglio o DNA
- Un solo vertice: primo caso non banale.

Origami piatti: un vertice

CONGETTURARE: da cosa può dipendere il fatto che l’origami sia piatto?

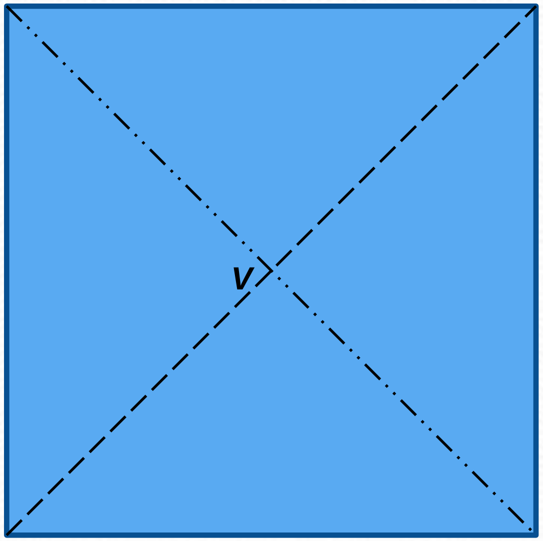
IPOTESI: Numerosità delle pieghe (totali, confronto tra quelle a monte (M) e a valle (V)).



Origami piatti: un vertice

CONGETTURARE: da cosa può dipendere il fatto che l'origami sia piatto?

IPOTESI: Numerosità delle pieghe (totali, confronto tra quelle a monte (M) e a valle (V)).

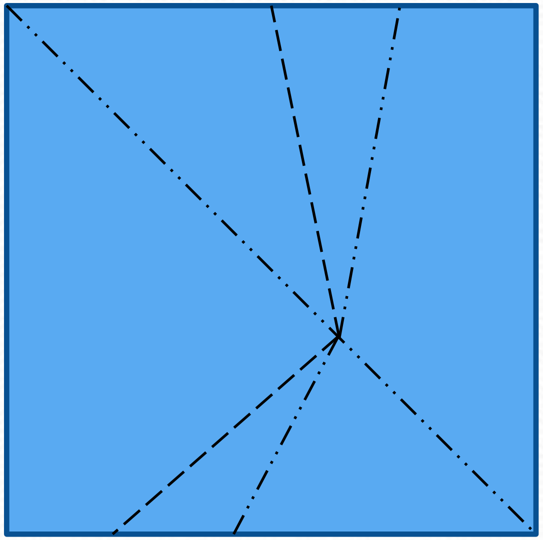


in V concorrono 4 pieghe

Origami piatti: un vertice

CONGETTURARE: da cosa può dipendere il fatto che l’origami sia piatto?

IPOTESI: Numerosità delle pieghe (totali, confronto tra quelle a monte (M) e a valle (V)).

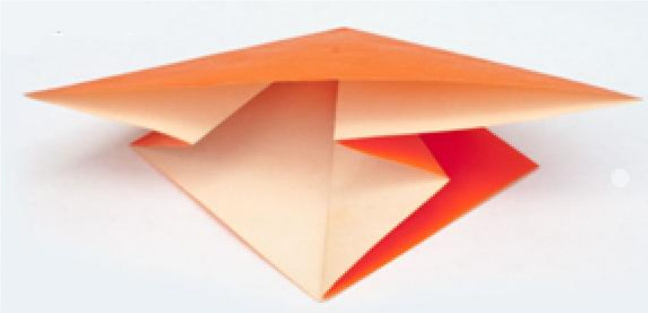


E’ importante sperimentare anche la piegatura di origami piatti a 1 vertice ‘non banali’

Origami piatti: un vertice

CONGETTURARE: da cosa può dipendere il fatto che l'origami sia piatto?

IPOTESI: Numerosità delle pieghe (totali, confronto tra quelle a monte (M) e a valle (V)).



E' importante sperimentare anche la piegatura di origami piatti a 1 vertice 'non banali'

Origami piatti: un vertice

Teorema 1: Se l'origami è piatto allora $M+V=2h$, $h \in N$

Teorema 2 (Meakawa – Justin): Se l'origami è piatto allora $|M-V|=2$

Logica delle proposizioni:

1) Discussione su CN e CS e ricerca di controesempi.

2) Teoremi e corollari.

Es in geometria: se un quadrilatero è un rombo allora le sue diagonali sono perpendicolari.

Origami piatti: un vertice

Teorema 1: Se l'origami è piatto allora $M+V=2h$, $h \in N$

Teorema 2 (Meakawa – Justin): Se l'origami è piatto allora $|M-V|=2$

Logica delle proposizioni:

1) Discussione su CN e CS e ricerca di controesempi.

2) Teoremi e corollari.

Es in teoria dei numeri: numeri primi di Mersenne

Origami piatti: un vertice

Teorema 1: Se l'origami è piatto allora $M+V=2h$, $h \in N$

Teorema 2 (Meakawa – Justin): Se l'origami è piatto allora $|M-V|=2$

Logica delle proposizioni:

1) Discussione su CN e CS e ricerca di controesempi.

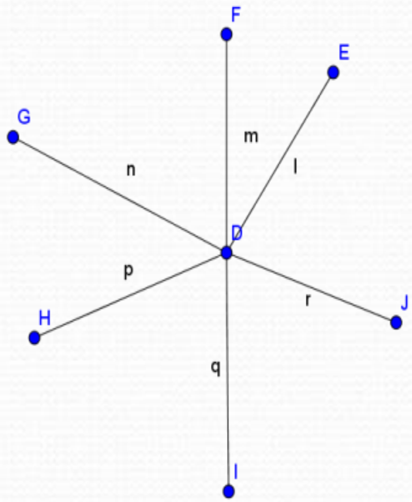
2) Teoremi e corollari.

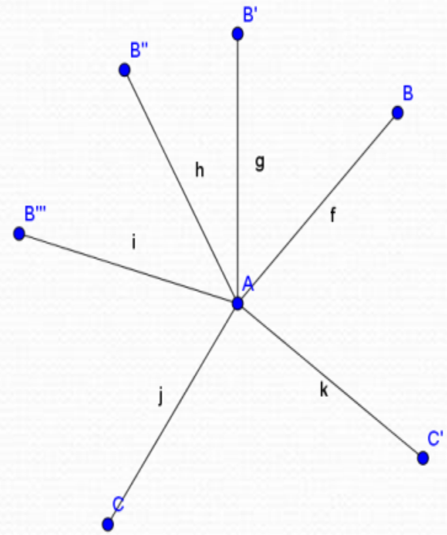
Es in Analisi Matematica: il teorema di Fermat per i massimi e minimi relativi

Origami piatti: un vertice

CONGETTURARE: c'è una relazione tra gli angoli degli 'spicchi'? La successione di pieghe monte/valle può dipendere dall'ampiezza degli angoli?

IPOTESI: Gli angoli più piccoli non possono essere delimitati da due pieghe a monte o due a valle altrimenti la carta dovrebbe autointersecarsi.



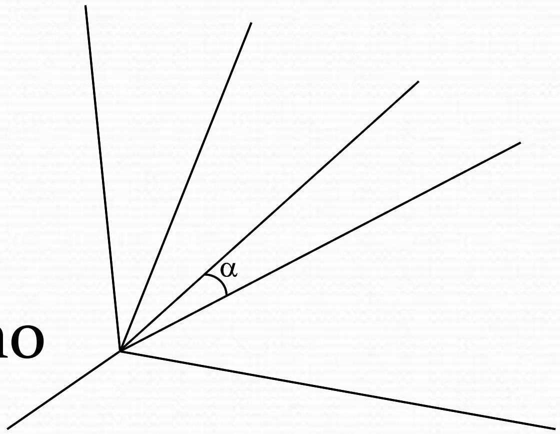


Origami piatti: un vertice

Teorema 3 (del minimo locale):

Se l'origami è piatto e un angolo α è compreso tra due angoli maggiori

allora una delle due pieghe che delimitano α sarà a monte e l'altra a valle.



Logica delle proposizioni:

Proprietà locali e globali.

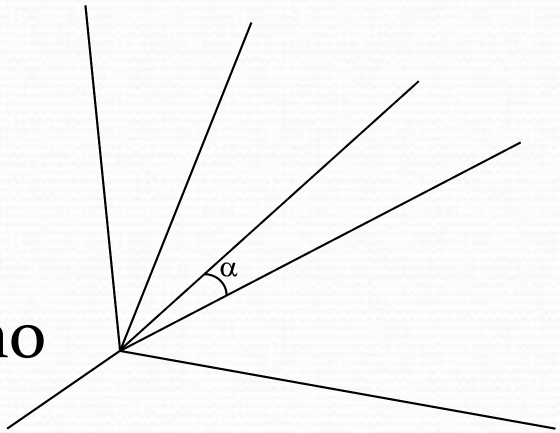
Es funzioni: monotonia globale e intervalli di monotonia

Origami piatti: un vertice

Teorema 3 (del minimo locale):

Se l'origami è piatto e un angolo α è compreso tra due angoli maggiori

allora una delle due pieghe che delimitano α sarà a monte e l'altra a valle.



Logica delle proposizioni:

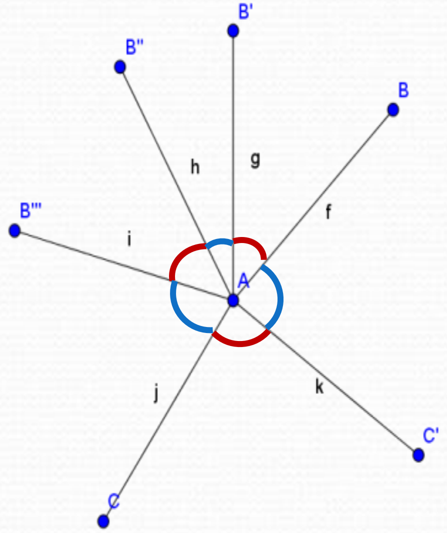
Proprietà locali e globali.

Es in Analisi Matematica: estremi relativi e assoluti

Origami piatti: un vertice

CONGETTURARE: c'è una relazione tra gli angoli degli 'spicchi'? L'ampiezza con la quale si succedono intorno al vertice può essere rilevante?

IPOTESI: Gli angoli sono sempre in numero pari: se consideriamo separatamente quelli di posto pari e quelli di posto dispari …



Origami piatti: un vertice

Teorema 4*: se $\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \cdots + \vartheta_{2n-1} - \vartheta_{2n} \neq 0$
allora l'origami non è piatto.

Teorema 4#: se $\vartheta_1 + \vartheta_3 + \cdots + \vartheta_{2n-1} \neq \pi$ allora l'origami non è piatto.

Logica delle proposizioni:

1) Proposizioni contronominali

2) Enunciati equivalenti.

Es in geometria: se un quadrilatero non ha le diagonali perpendicolari allora non può avere i lati congruenti

Origami piatti: un vertice

Teorema 4(Kawasaki-Justin): un origami avente un solo vertice è piatto se e solo se

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \cdots + \vartheta_{2n-1} - \vartheta_{2n} = 0$$

Logica delle proposizioni:

1) Criteri e CNS

Es in geometria: criterio per i triangoli isosceli

Origami piatti: un vertice

Teorema 4(Kawasaki-Justin): un origami avente un solo vertice è piatto se e solo se

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \cdots + \vartheta_{2n-1} - \vartheta_{2n} = 0$$

Logica delle proposizioni:

1) Criteri e CNS

Es in geometria: un triangolo è isoscele se e solo se altezza e bisettrice uscenti dallo stesso vertice coincidono.

Origami piatti: un vertice

Teorema 4(Kawasaki-Justin): un origami avente un solo vertice è piatto se e solo se

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \cdots + \vartheta_{2n-1} - \vartheta_{2n} = 0$$

Logica delle proposizioni:

1) Criteri e CNS

2) Dimostrazioni costruttive e non costruttive

Es in teoria dei numeri: Teorema di Euclide

Origami piatti: un vertice

Teorema 4(Kawasaki-Justin): un origami avente un solo vertice è piatto se e solo se

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_3 - \cdots + \vartheta_{2n-1} - \vartheta_{2n} = 0$$

Logica delle proposizioni:

1) Criteri e CNS

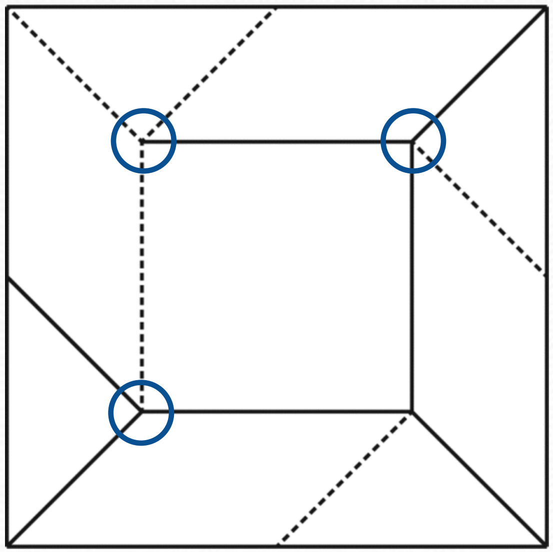
2) Dimostrazioni costruttive

3) Teoremi di esistenza e/o unicità

Es in Analisi Matematica: Teorema di Weierstrass

Origami piatti: più di un vertice

I risultati precedenti possono essere interpretati come **proprietà locali** perché indispensabili per 'chiudere' e rendere piatto un origami in corrispondenza di ciascun vertice.



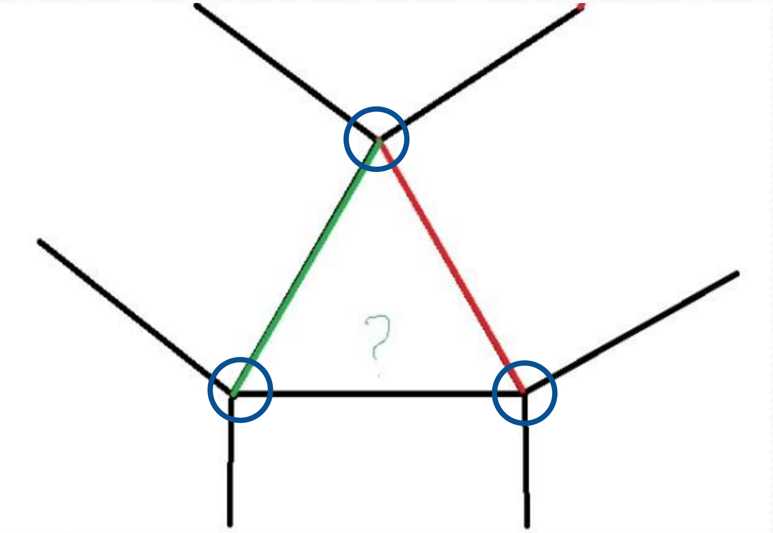
Origami piatti: più di un vertice

I risultati precedenti possono essere interpretati come **proprietà locali** perché indispensabili per 'chiudere' e rendere piatto un origami in corrispondenza di ciascun vertice.

Origami piatti: più di un vertice

I risultati precedenti possono essere interpretati come **proprietà locali** perché indispensabili per ‘chiudere’ e rendere piatto un origami in corrispondenza di ciascun vertice.

Ma si tratta di proprietà locali o globali?

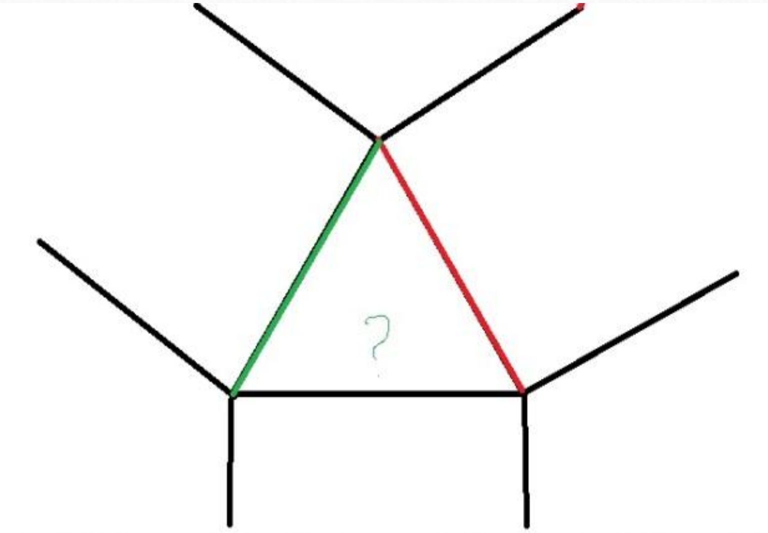


Teorema 3 (del minimo locale):
Se l’origami è piatto e un angolo α è compreso tra due angoli maggiori allora una delle due pieghe che delimitano α sarà a monte e l’altra a valle.

Origami piatti: più di un vertice

I risultati precedenti possono essere interpretati come **proprietà locali** perché indispensabili per ‘chiudere’ e rendere piatto un origami in corrispondenza di ciascun vertice.

Il problema di più vertici non può essere risolto come una semplice estensione di quanto finora osservato!



Teorema 3 (del minimo locale):
Se l’origami è piatto e un angolo α è compreso tra due angoli maggiori allora una delle due pieghe che delimitano α sarà a monte e l’altra a valle.

Grazie per l’attenzione e buone pieghe a tutti!

- Joseph O’Rourke, *How to fold it,* 2011 Cambridge University Press

- https://www.youtube.com/watch?v=P_ezsOeX5mQ
- http://news.mit.edu/2016/ingestible-origami-robot-0512
- https://www.youtube.com/watch?v=DJ4hDppP_SQ