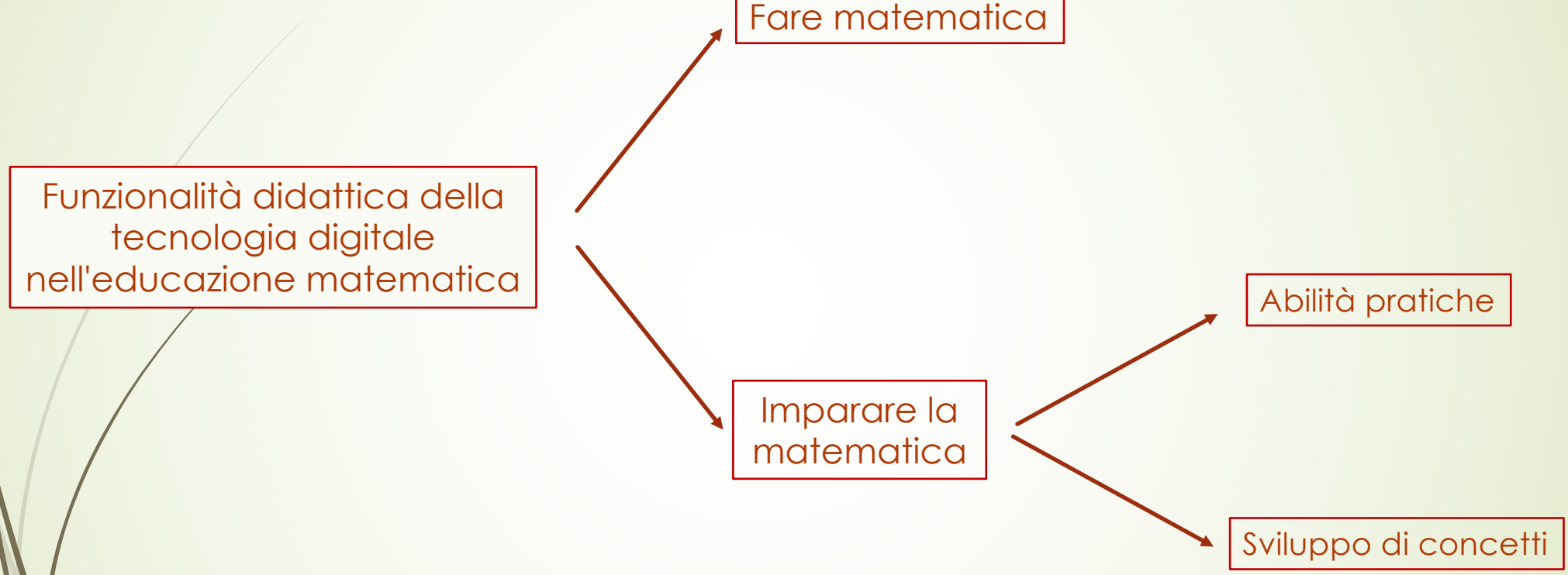


Processi di instrumentazione e... oltre con GeoGebra

Ferdinando Arzarello
Dipartimento di Matematica
Università di Torino

Gli strumenti contano: si collocano tra l'utente e il fenomeno da modellare e modellano la struttura delle attività con questi.

(Hoyles & Noss, 2003, p. 341)



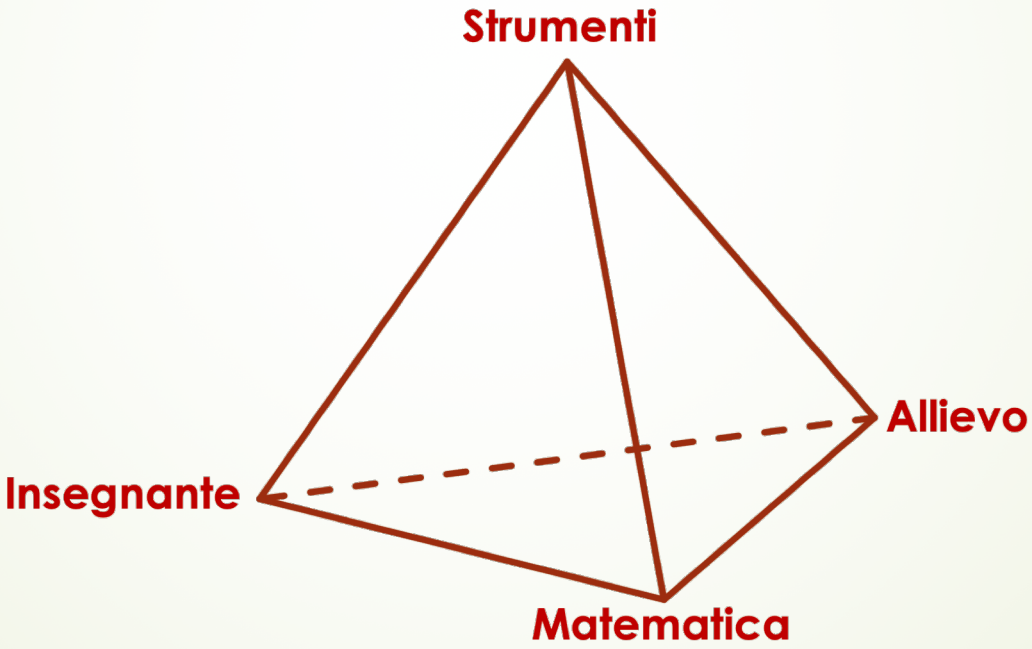
(Drijvers, Boon, & Van Reeuwijk, 2011; Drijvers, 2019)

Indice

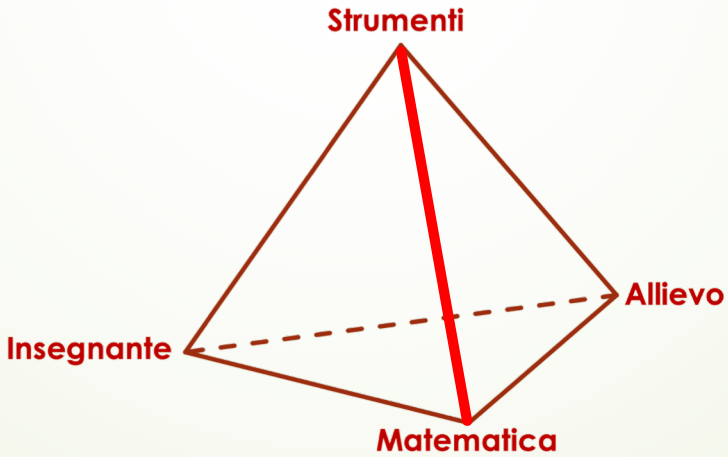
1. Instrumentazione
2. Trascinamento
3. Covariazione
4. Abduzione
5. Embodiment

Instrumentazione

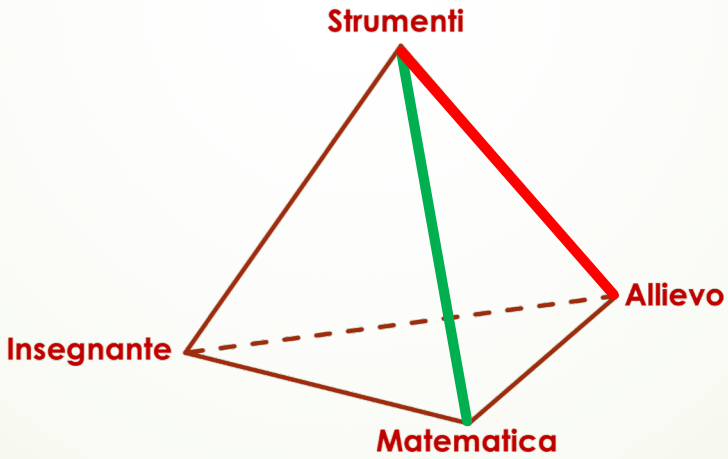
è un insieme di complessi rapporti diadici e triadici



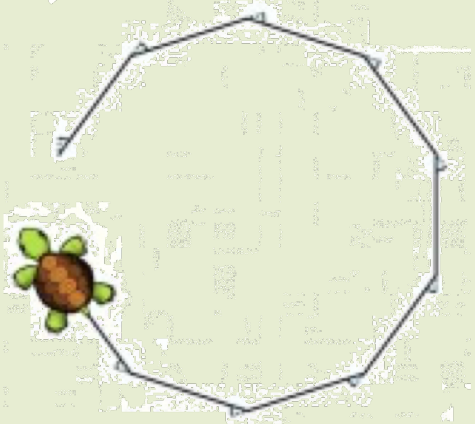
Una prima visione un po' ingenua degli strumenti digitali e del loro uso nell'educazione matematica potrebbe essere che gli strumenti sono solo assistenti matematici concreti che ci aiutano a svolgere compiti, a "fare i lavori": usarli riduce la risoluzione di compiti matematici alla pressione di pulsanti e come tale semplifica la nostra vita.



Tuttavia, le cose non sono così semplici. Gli strumenti non sono così **neutrali** come si potrebbe sperare, ma presentano costi e vincoli, opportunità e ostacoli e come tali guidano le **pratiche** matematiche dell'utente.



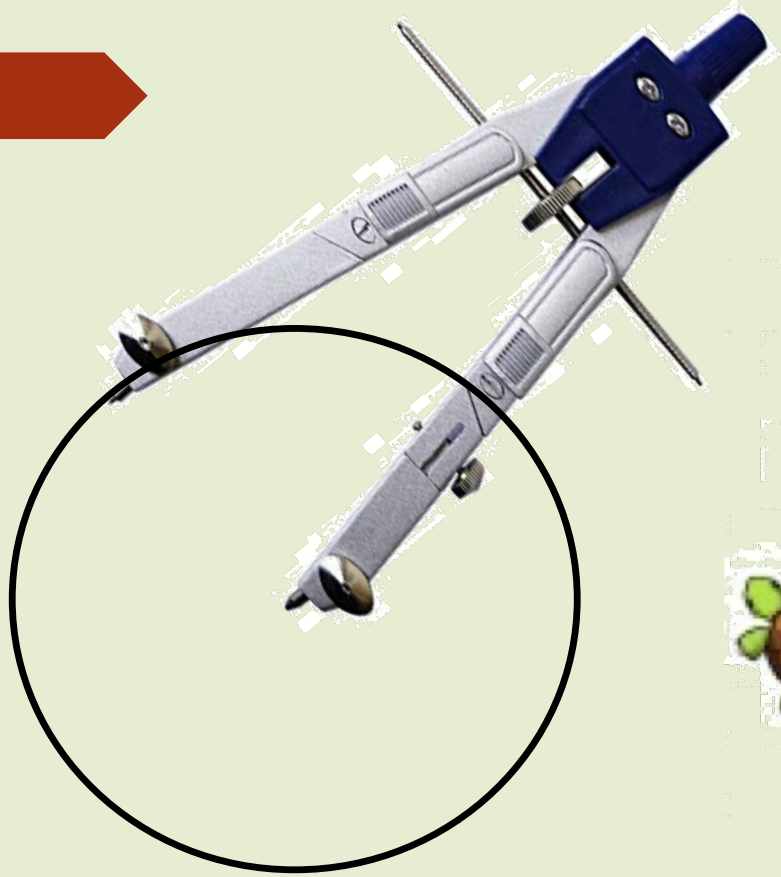


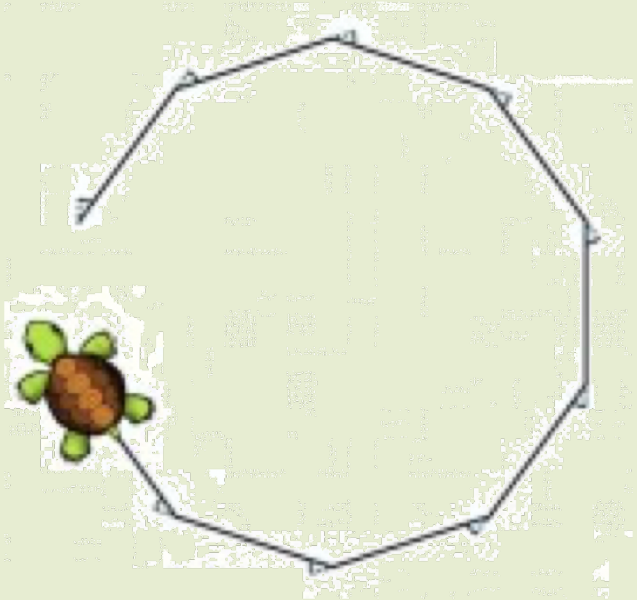


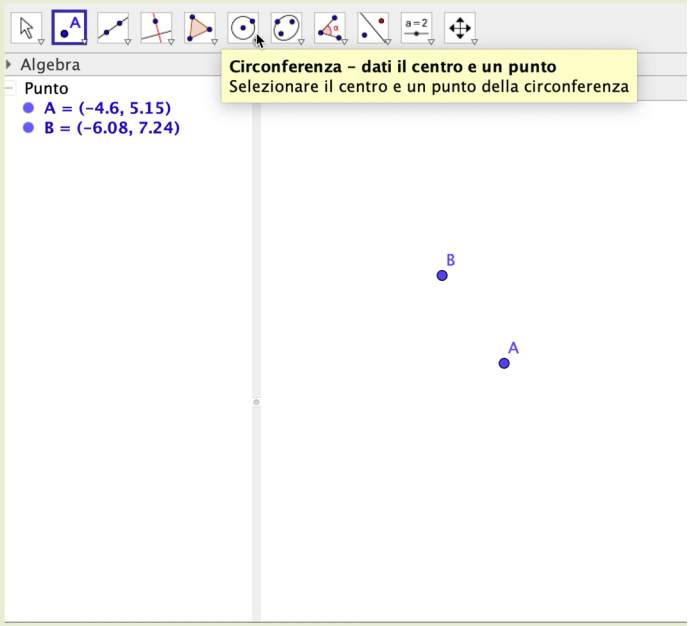
Disegnare un cerchio con compassi fisici è molto diverso dal disegnarlo in un ambiente di geometria dinamica come GeoGebra.
Nel primo caso, si sperimenta davvero un movimento circolare, dopo aver deciso il centro e il raggio.
Nel secondo caso, l'attenzione è focalizzata sull'impostazione del centro e del raggio, ma mentre si allarga il raggio, il cerchio sta crescendo e il movimento circolare non è più necessario.

Strumenti diversi portano a tecniche diverse e come tali a idee diverse sullo stesso concetto matematico sottostante. È il concetto stesso a cambiare.

Tracciare un cerchio



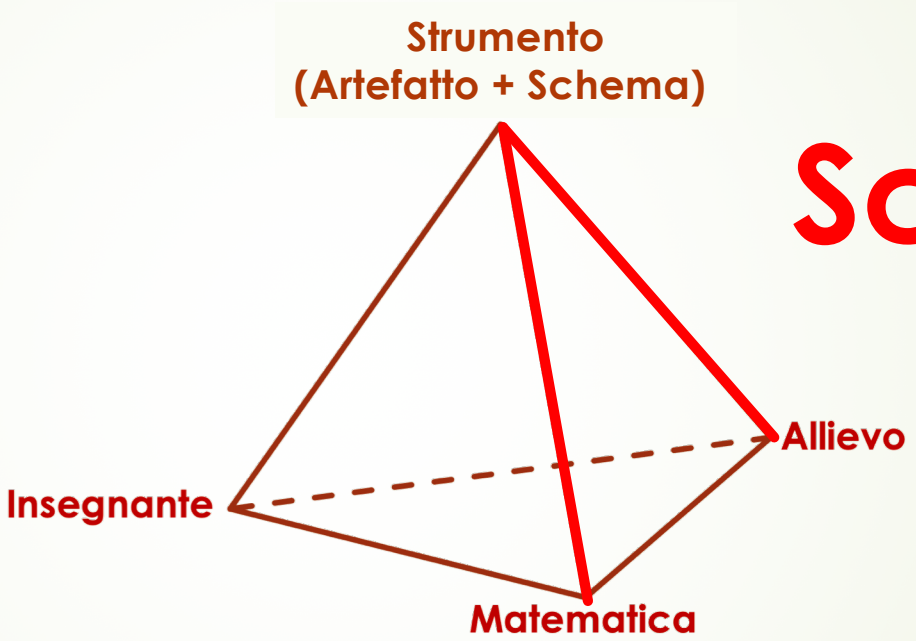




Strumenti diversi portano a tecniche diverse e come tali a idee diverse sullo stesso concetto matematico sottostante. È il concetto stesso a cambiare.

In effetti, in linea con Vygotsky (1978), gli strumenti mediano tra l'attività umana e l'ambiente. Di conseguenza, l'uso degli strumenti digitali per l'apprendimento della matematica non è solo una questione di trasformazione diretta del pensiero matematico in comandi per gli strumenti. Da un lato, l'utente modella le tecniche per l'utilizzo dello strumento, ma dall'altro lo strumento modella e trasforma la pratica matematica dell'utente. Queste considerazioni hanno dato origine allo sviluppo di una nuova visione teorica, chiamata **approccio strumentale** all'uso degli strumenti. La chiave di questo approccio sono le nozioni di **artefatto**, **strumento**, **genesi strumentale**, **schema** e **tecnica**.

Strumento = Artefatto + Schema



Schema

Genesi strumentale = processo per cui un artefatto diventa parte di uno strumento

Schemi 1

Basandoci sul lavoro di Piaget (1985) e altri, uno schema è considerato un modo più o meno stabile per affrontare situazioni o compiti specifici.
Vergnaud afferma che "l'organizzazione sequenziale dell'attività per una determinata situazione è il riferimento primitivo e prototipico per il concetto di schema" (Vergnaud, 2009, p.84).
Riferendosi in particolare allo schema del conteggio, Vergnaud (1987, p.47) parla di "una sequenza funzionale e organizzata di azioni governate da regole, una totalità dinamica la cui efficienza richiede sia abilità sensomotorie che competenze cognitive."

[→ schemi percettivo-gesturali, 2009]

Schemi 2

L'evoluzione di uno schema prevede lo sviluppo intrecciato delle capacità sensoriali e cognitive. Siccome lo schema è visto come facente parte di uno strumento, si parla di schemi di strumentazione. Artigue (2002) evidenzia il valore **pragmatico** ed **epistemico** degli schemi: il valore pragmatico nel senso del loro potenziale produttivo per "fare le cose" e il valore epistemico nel senso di contribuire al significato e alla comprensione della matematica coinvolta.

Tecniche strumentate 1

Le parti osservabili di uno schema di strumentazione, le interazioni concrete tra l'utente e l'artefatto, sono chiamate **tecniche strumentate**. Le tecniche strumentate sono sequenze più o meno stabili di interazioni tecniche tra l'utente e l'artefatto con un obiettivo particolare. Pertanto, uno schema di strumentazione è costituito da una o più tecniche strumentali osservabili, guidate dalle opportunità e dai vincoli offerti dal manufatto e dalla conoscenza degli studenti.

Tecniche strumentate 2

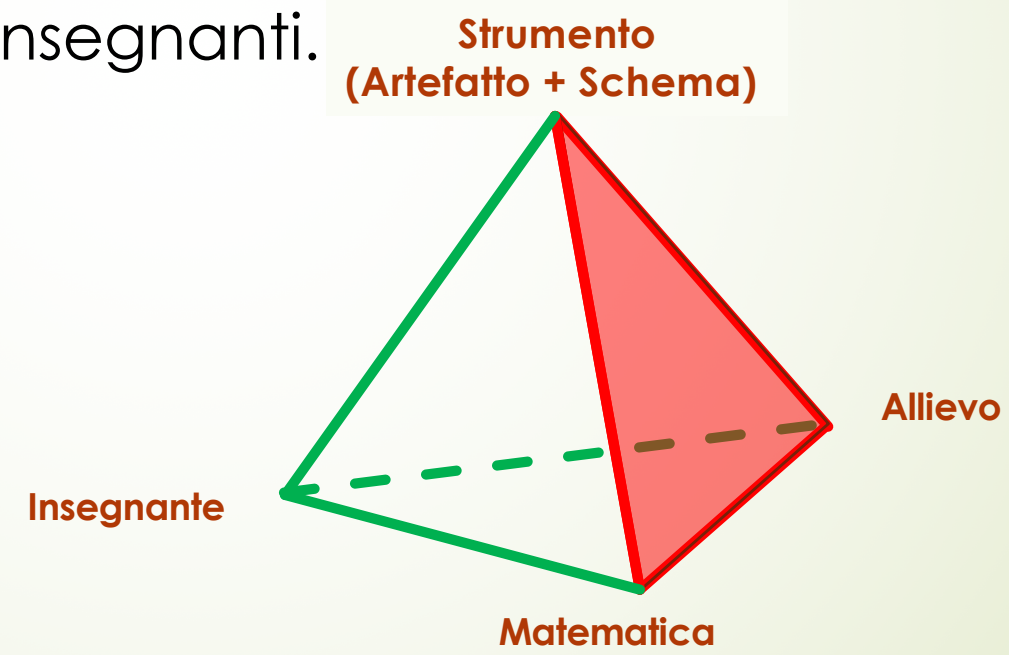
Le tecniche strumentate possono anche contribuire allo sviluppo della conoscenza degli studenti.
Pertanto, le tecniche possono essere viste come azioni che riflettono la conoscenza degli studenti. E, ancora più importante, possono coesistere tecniche e conoscenze. È questa co-emergenza che forma il cuore della **genesi strumentale** e che riflette il principale potenziale educativo dell'uso dell'artefatto in una data situazione.

Nell'approccio strumentale, uno schema dipende dal soggetto, dall'artefatto e dal compito.

Quindi:

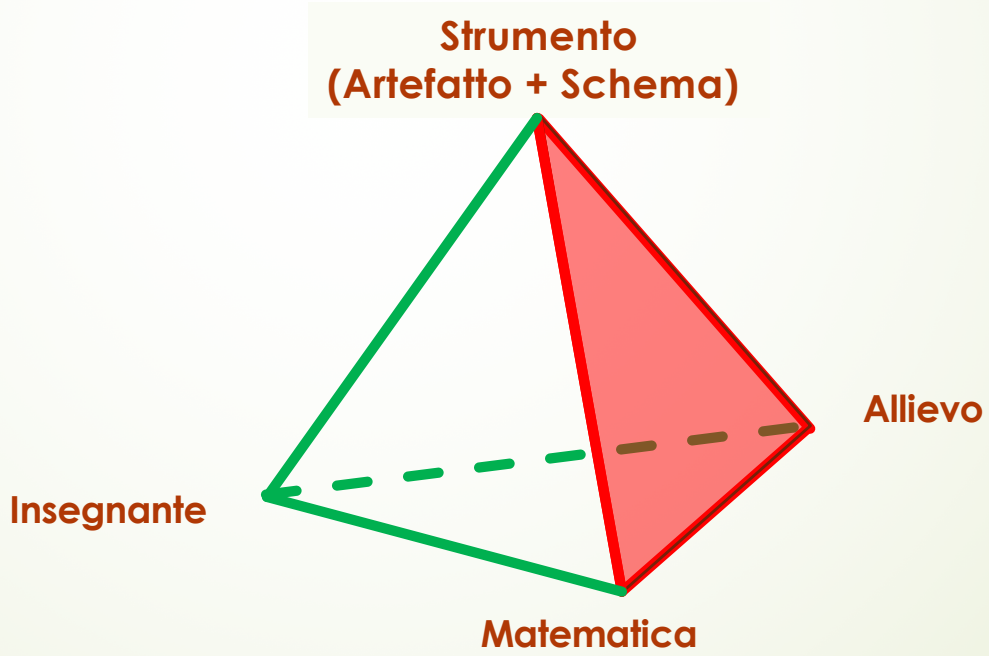
1. un compito simile con artefatti diversi può portare a schemi diversi;
2. la genesi strumentale non è solo un processo individuale, ma fa parte dei processi di apprendimento sociale e istituzionalizzazione all'interno di un contesto educativo specifico;
3. alcuni artefatti sono più adatti a specifici tipi di genesi strumentale di altri (distanza strumentale).

Perciò se nella progettazione didattica si ha una distanza eccessiva o addirittura una discrepanza tra il **compito**, le possibilità dell'**artefatto** e le **conoscenze** matematiche in gioco non si avrà un progetto didattico efficace. L'attenzione alla progettazione di situazioni in cui queste tre componenti interagiscano positivamente e produttivamente per i nostri allievi è il compito essenziale di noi insegnanti.

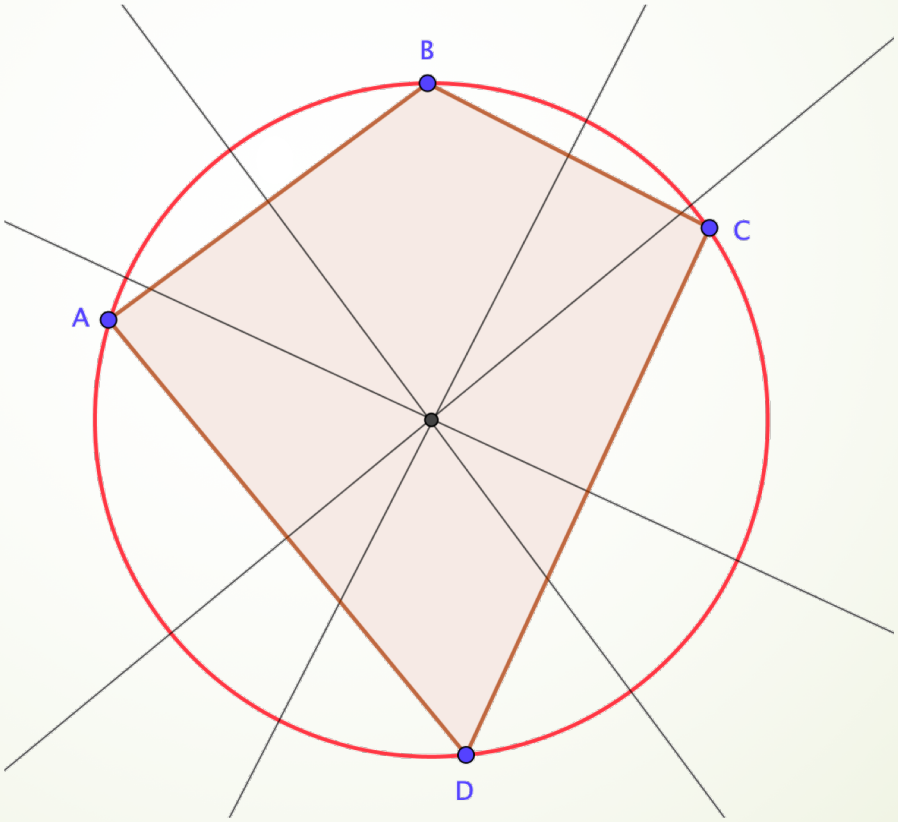


Gli strumenti e le tecniche non sono neutrali, ma possono evidenziare o addirittura richiedere punti di vista matematici specifici sull'attività in gioco.
Di conseguenza, l'uso degli strumenti è meno semplice di quanto possa sembrare.
Il punto di vista strumentale è utile per renderci consapevoli di questa complessità e per identificare l'interazione tra artefatti e compiti, tra tecniche e schemi.
Riconoscere la genesi strumentale come percorso per l'apprendimento della matematica, e probabilmente anche per una matematica diversa, è un importante passo avanti per favorire l'apprendimento con l'utilizzo di strumenti digitali.

Vediamo ora un semplice esempio di come questa complessa interazione insegnante-matematica-strumento-allievo possa realizzarsi.



Consideriamo il seguente teorema di Geometria:
Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza sse gli assi dei suoi lati si incontrano in un unico punto.



Supponiamo che i nostri studenti di una seconda superiore abbiano alcune conoscenze di geometria e siano abituati a usare GeGe per esplorare configurazioni geometriche usando la modalità di trascinamento per formulare congetture ed eventualmente dimostrarle.

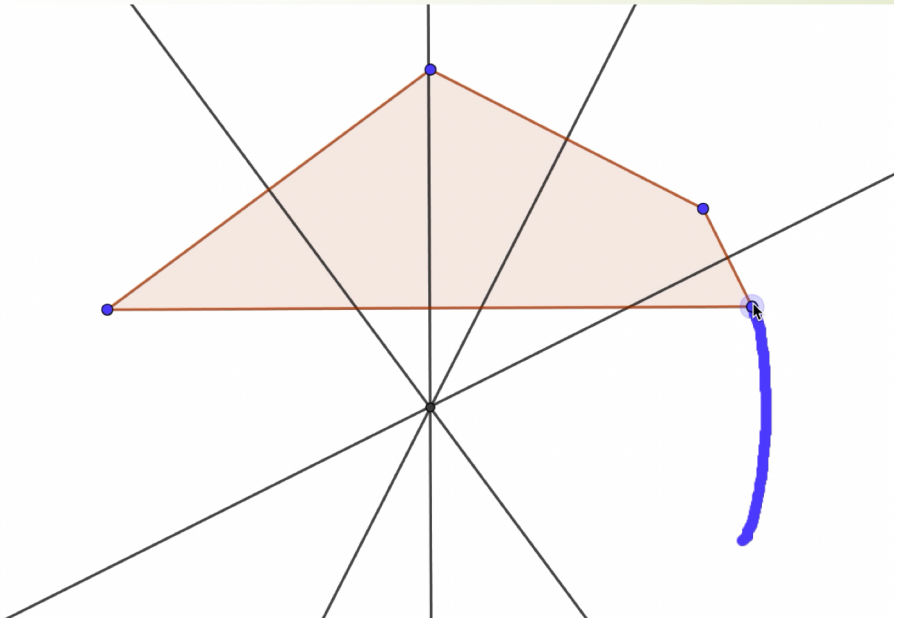
Sono possibili varie formulazioni, più o meno aperte, del nostro problema.

a) Dato il quadrilatero ABCD, considera gli assi dei suoi lati. Esplora le relazioni tra i punti in cui gli assi si incontrano e ABCD; formula congetture e dimostrale.

b) Dato il quadrilatero ABCD, considera gli assi dei suoi lati. Supponiamo che questi si incontrino in un unico punto O. Esplora le relazioni tra ABCD e O; formula congetture e dimostrale.

Il problema così formulato induce gli studenti ad esplorare col trascinamento la situazione.



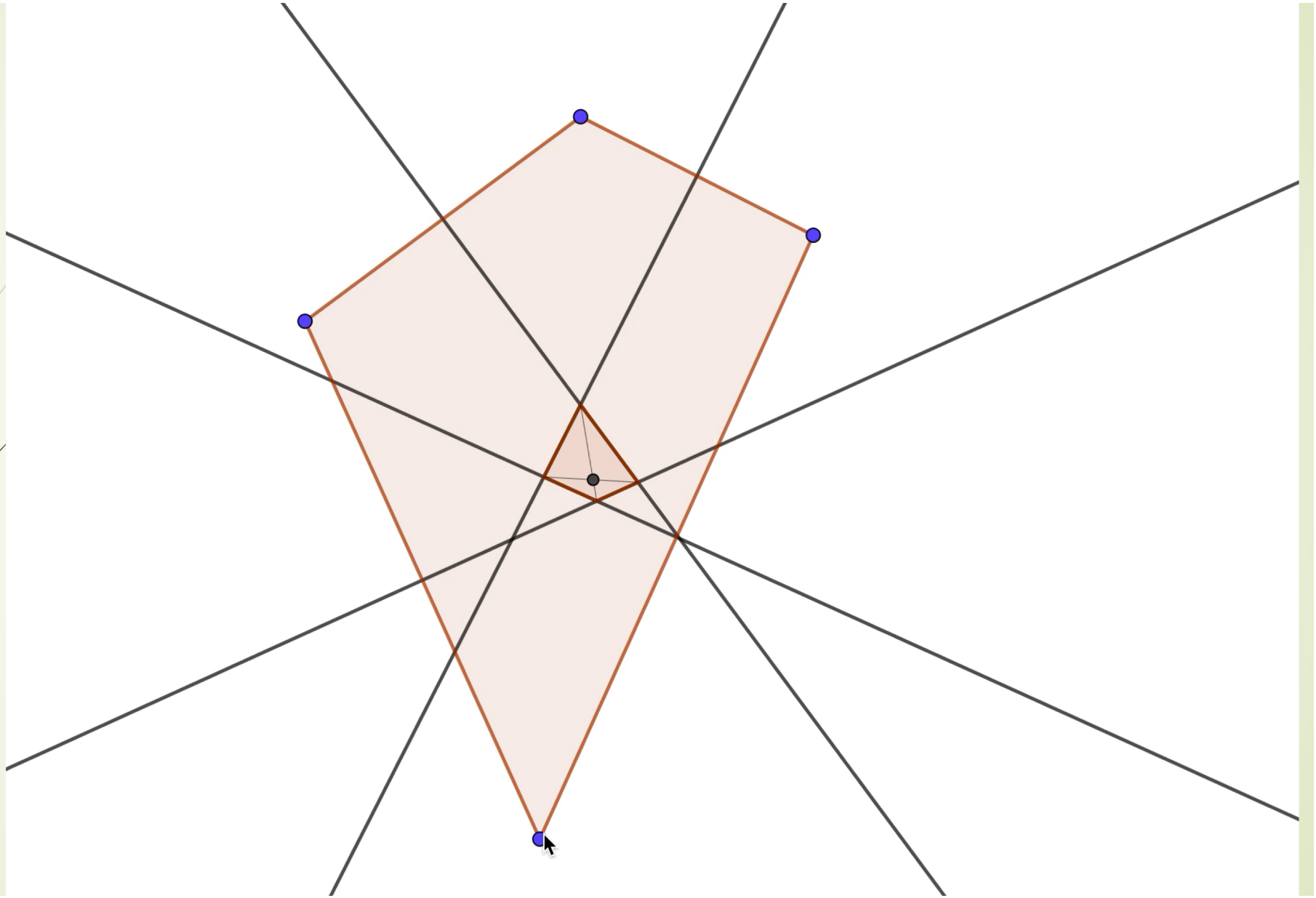


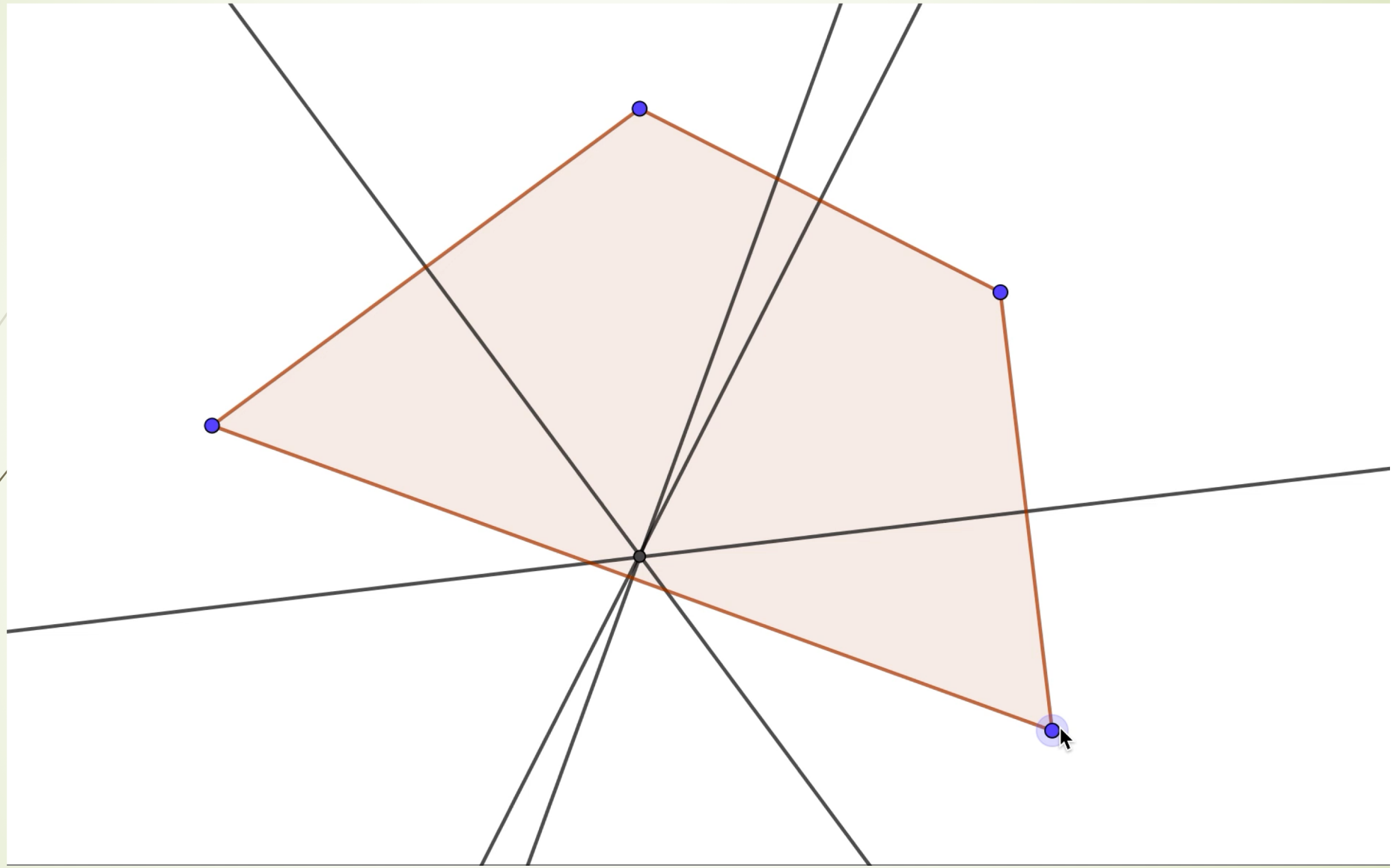
Indice

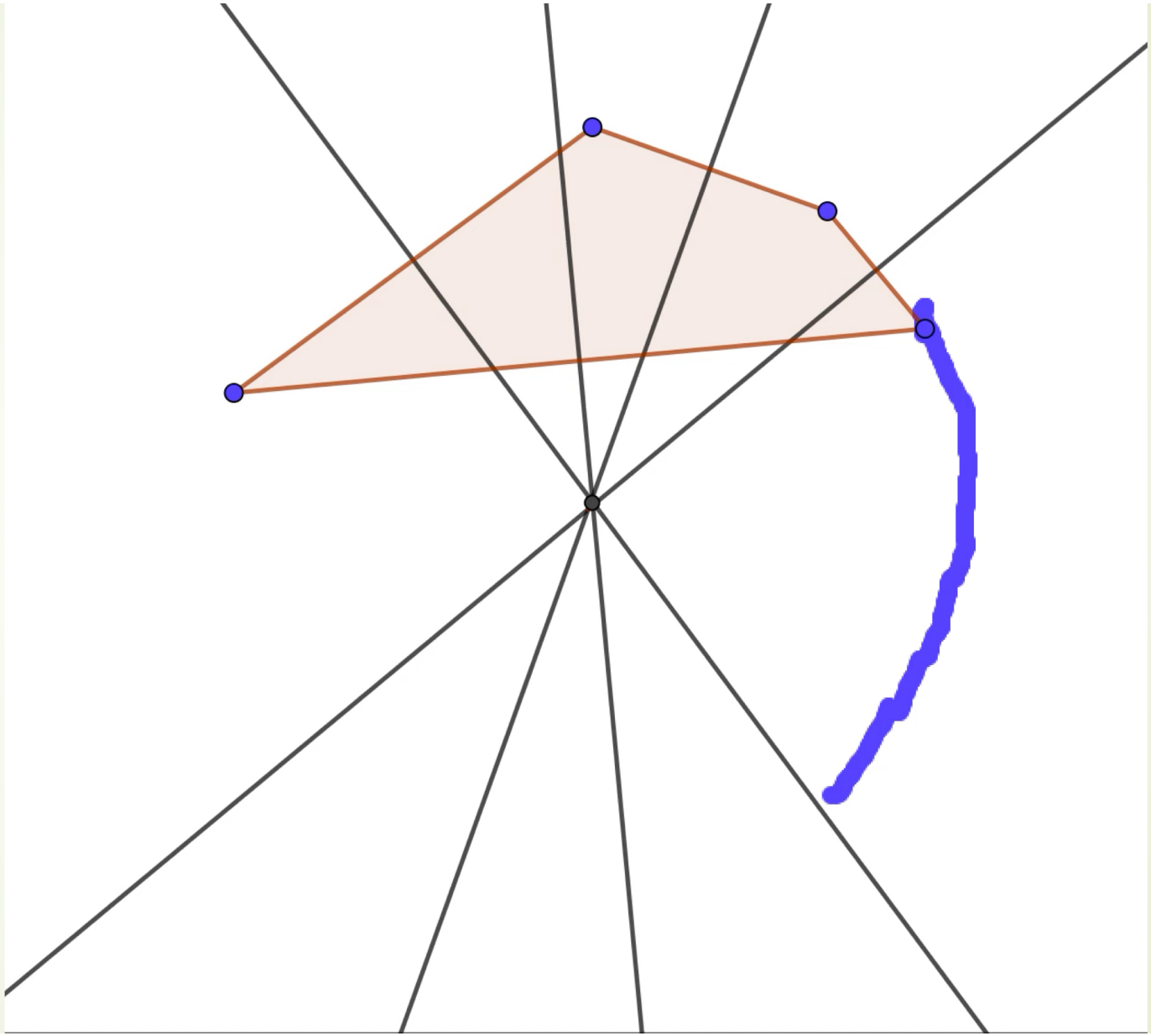
1. Instrumentazione
2. Trascinamento
3. Covariazione
4. Abduzione
5. Embodiment

Il trascinamento

Il *trascinamento (dragging)* è un'azione che può essere svolta in vari modi dallo studente esploratore e che consiste nel selezionare un elemento 'libero' di una figura dinamica (in genere un punto) e muoverlo sullo schermo (mediante la mediazione del mouse o direttamente con il dito, se il software è utilizzato in un ambiente touch).







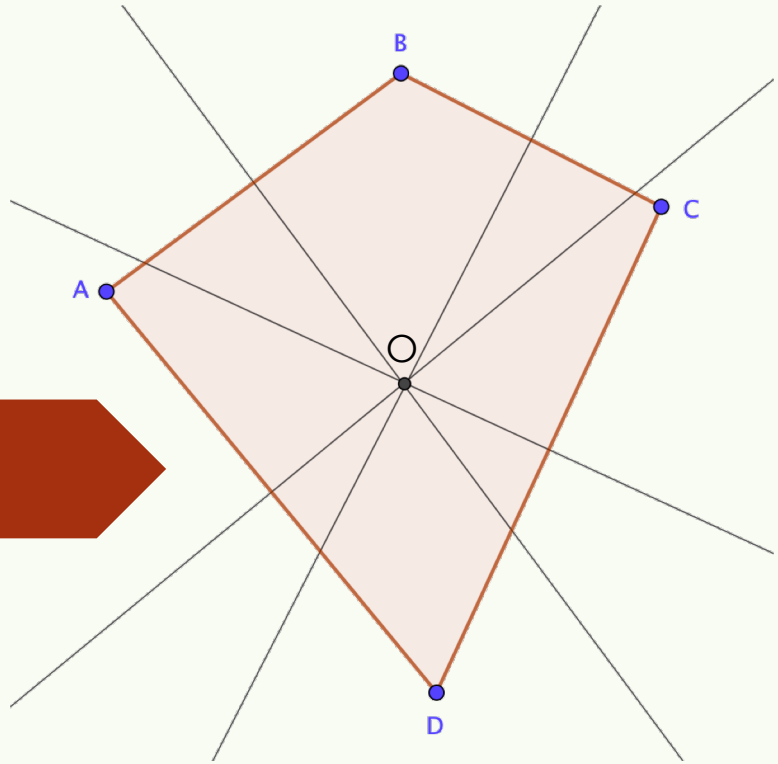
È la formulazione del problema che induce gli studenti ad esplorare col trascinamento la situazione.

La genesi strumentale che ne risulta rivela all'analisi una varietà interessante di componenti cognitive ed epistemologiche, che si rivelano utili per valutare l'efficacia didattica della formulazione.

Ne esamineremo alcune:

1. La formulazione del problema;
2. I processi cognitivi indotti dal trascinamento
   a. Modalità di interazione con l'ambiente di geometria dinamica;
   b. Processi abduttivi e deduttivi
3. Aspetti covariazionali.

2 formulazioni = 2 problemi diversi



Formulazione S (TGE-standard):
Dato il quadrilatero ABCD, considerare gli assi dei suoi lati. Dimostrare che se questi si incontrano in un unico punto O, (allora) il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza.

Formulazione A (aperta):
Dato il quadrilatero ABCD, considerare gli assi dei suoi lati. Supponiamo che questi si incontrino in un unico punto O. Esplorare le relazioni tra ABCD e O.

La formulazione A è molto vicina a quella di **problema aperto** secondo Arsac e Mante (1988, 2007)

Un problema aperto:

- Ha un enunciato corto
- L'enunciato non suggerisce né il metodo, né la soluzione (nessuna domanda intermedia o domande del tipo 'dimostra che'). In ogni caso la soluzione non si deve ridurre all'uso o all'applicazione degli ultimi risultati presentati nel corso.
- Il problema è in un dominio concettuale familiare agli allievi. Perciò questi possono facilmente 'impadronirsi' della situazione problematica e cimentarsi subito in tentativi, congetture, schemi risolutivi, controesempi.

Nei processi risolutivi di problemi aperti si possono verificare situazioni di ‘controllo’ in due sensi sulle figure di AGD:

ascendente / discendente.

(Saada-Robert, Gallo, Arzarello)

La versione A induce una sorta di incanalamento direzionale dell'attenzione (sia cognitiva sia epistemica) rispetto alla formulazione S.

In A l'attenzione è rivolta a esplorare, cercando se c'è qualcosa che non cambia (invariante) mentre si trascinano gli elementi liberi.

NB. La costruzione di O nel video non è 'robusta': quindi lo studente cerca di 'mantenere insieme' i 4 punti intersezione degli assi trascinando un vertice di ABCD.

In generale, una formulazione aperta induce un controllo ascendente prima e discendente dopo, con successive possibili alternanze asc-disc.

È interessante confrontare le frequenze (ritmi) di queste alternanze in situazioni diverse: essi forniscono un indicatore delle modalità cognitive con cui avviene l'attività del solutore.

La modalità ascendente stimola l'esplorazione e può dar luogo alla scoperta/formulazione di legami condizionali.

In generale una formulazione standard invece può essere causa di blocchi in quanto richiede di partire con una modalità ascendente, di ricerca di quegli elementi teorici che potrebbero validare la tesi.

Ma questa non è indotta dalla formulazione e si possono avere invece modalità di partenza discendenti, che possono non produrre legami condizionali scorretti e non legati a congetture costruite.

Per risolvere il problema S infatti si fa vedere che O è centro di una circonferenza che contiene A, B, C, D, in quanto per le proprietà degli assi,
A, B; B, C; C, D; D, A sono equidistanti ciascuno dal relativo asse e quindi tutti quanti dal punto O.
Non c'è alcun pensiero funzionale coinvolto: prevalgono le concatenazioni logiche.

Nella versione S non vi è l'incanalamento dell'attenzione che si ha in A: ipotesi e tesi sono legati dalla relazione logica di dimostrazione, che può essere opaca per il solutore.

Indice

1. Instrumentazione
2. Trascinamento
3. Covariazione
4. Abduzione
5. Embodiment

Formulazione funzionale

La formulazione e l'attività con il trascinamento induce a pensare O come dipendente dai dati A, B, C, D.

Il 'trascinatore' muove il mouse cercando continuamente un feed-back visivo dalla figura che sta muovendo e dalla traccia disegnata via via (studi con l'eye-tracker confermano questo).

La situazione può essere descritta in termini di **covariazione funzionale** come:

$$? \; O = \phi\,(A,B,C,D)$$

1° livello oggetti — ? — 2° livello relazioni

Il problema aperto induce a pensare che cosa e come covariano i punti intersezione al variare dei vertici di A,B,C,D: ϕ (A,B,C,D)= ?
E di vedere quando esiste un unico punto O tale che O = ϕ (A,B,C,D).
Logicamente si tratta di una relazione funzionale tra le possibili posizioni (di uno) dei vertici e i conseguenti punti intersezioni degli assi: in alcuni casi la funzione ϕ produce un solo punto O.
L'esplorazione richiede di pensare in modo covariante, e questo può produrre eventualmente la formulazione di un teorema.

Un approccio covariante è un fenomeno profondo che non è così presente nella formulazione didattica usuale della geometria di Euclide (TGE), né epistemologicamente né didatticamente.
Esso infatti:

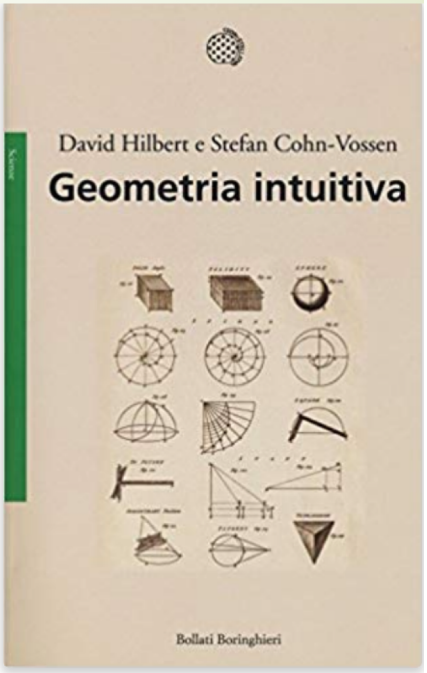
- induce una forma "diversa" di geometria (ad es. quella tipica dei problemi aperti di congettura), in cui la base epistemologica cambia rispetto a TGE.
- ha conseguenze cognitive
- può avere implicazioni didattiche

La ricerca/scoperta di covariazionalità, cui i problemi aperti puntano, costituisce il cemento che lega i passi delle argomentazioni.

In AGD il lavoro col software genera un'instrumentazione di questo processo di ricerca covariante, che può anche avvenire in ambiente di sola carta e matita, in genere con una formulazione aperta dei problemi, ma generalmente richiede solutori esperti per essere prodotta.

AGD è una sorta di lente che esalta la covariazione tra gli oggetti geometrici della situazione: questa è promossa dalla formulazione del problema; la sua strumentazione avviene attraverso la manipolazione tramite trascinamento.

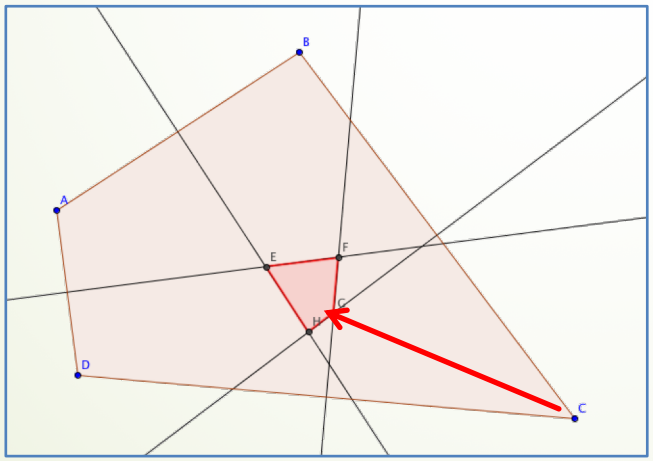
«In matematica, come in tutta la ricerca scientifica, troviamo due tendenze: la tendenza all'astrazione – che cerca di elaborare il punto di vista logico dalla varietà dei materiali e di connetterlo sistematicamente- e l'altra tendenza, quella della comprensione intuitiva, che invece ottiene il suo oggetto e le sue relazioni importanti da una comprensione viva». (D. Hilbert, S. Cohn-Vossen)

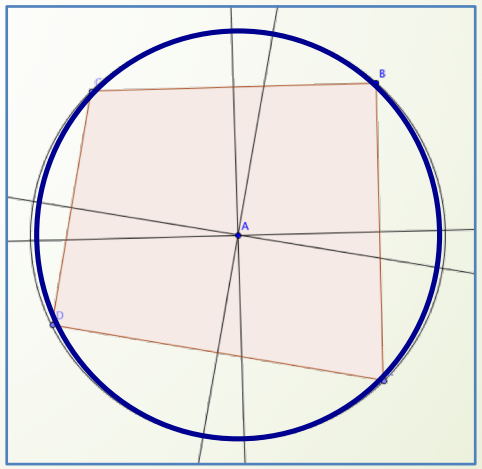


IPOTESI GENERALE

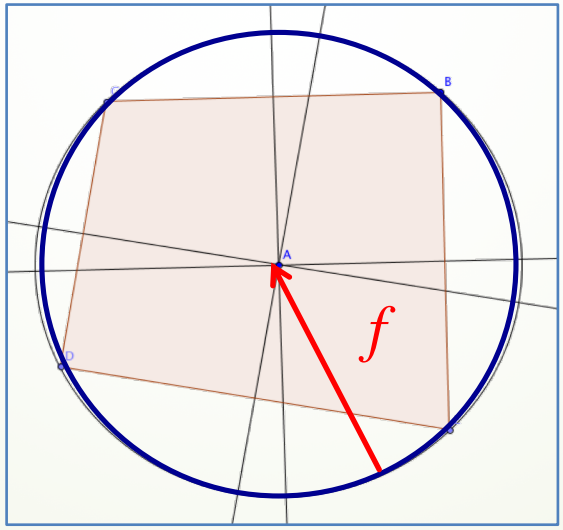
L'AGD permette di instrumentare i processi argomentativi/dimostrativi individuati tramite i costrutti discussi prima: è uno strumento di mediazione semiotica in questo senso.
Essa stabilisce un'analogia con le scienze sperimentali, soprattutto per l'aspetto covariazionale.

L'idea stessa di un esperimento controllato è che lo scienziato può variare, entro certi limiti, una variabile (la variabile controllata) e osservare come un'altra variabile (la variabile osservata) cambia di conseguenza.
Il risultato di un esperimento controllato è quindi una dichiarazione della dipendenza tra le due variabili.





Come sarà strutturata una simile affermazione? Dirà che ad ogni valore della variabile controllata corrisponde un certo valore della variabile osservata. Una risposta a una domanda posta alla natura è quindi una funzione, *f* che individua tale covariazione funzionale.



Il pensiero covariazionale, non proprio della TGE, è alla base della logic of inquiry e delle esperienze in AGD.
Naturalmente la formulazione dei problemi e il modo con cui sono spiegati in classe assume un'importanza rilevante,
Emerge una rottura epistemica tra la geometria (la matematica) dell'AGD e in generale di una geometria (matematica) acquisita secondo i canoni della logica della scoperta, da un lato, e la geometria elementare strutturata secondo i canoni statici della TGE.

È questo il punto caldo da studiare/definire anche didatticamente.

Indice

1. Instrumentazione
2. Trascinamento
3. Covariazione
4. Abduzione
5. Embodiment

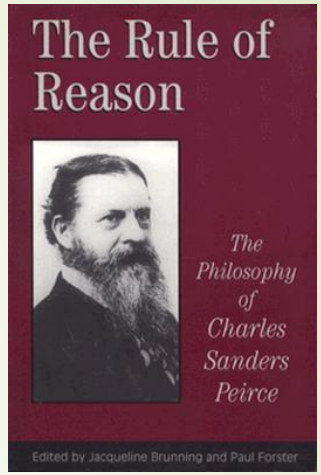
Le attività di trascinamento in Geogebra è un motore di processi abduttivi

La scoperta in matematica e nelle scienze è spesso basata su un meccanismo cognitivo studiato per primo da C.S. Peirce: l'abduzione.



C.S. Peirce, 1839-1914

Deduzione

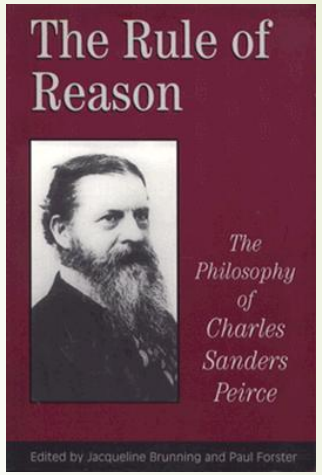


Osservo:	C	Caso
So che:	C → A	Regola
Deduco:	A	Risultato

Abduzione







Supponiamo di sapere che quel sacco è pieno di fagioli bianchi.

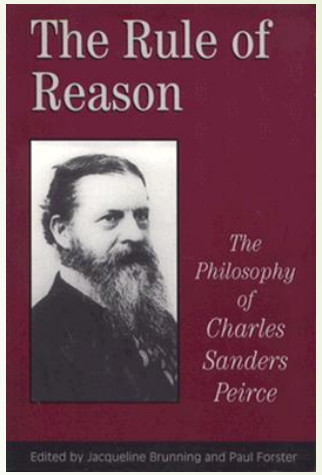
Si considerino gli enunciati:

A) questi fagioli sono bianchi (RISULTATO) ;

B) se i fagioli provengono da quel sacco allora sono bianchi (REGOLA);

C) probabilmente questi fagioli provengono da quel sacco (CASO).

Abduzione



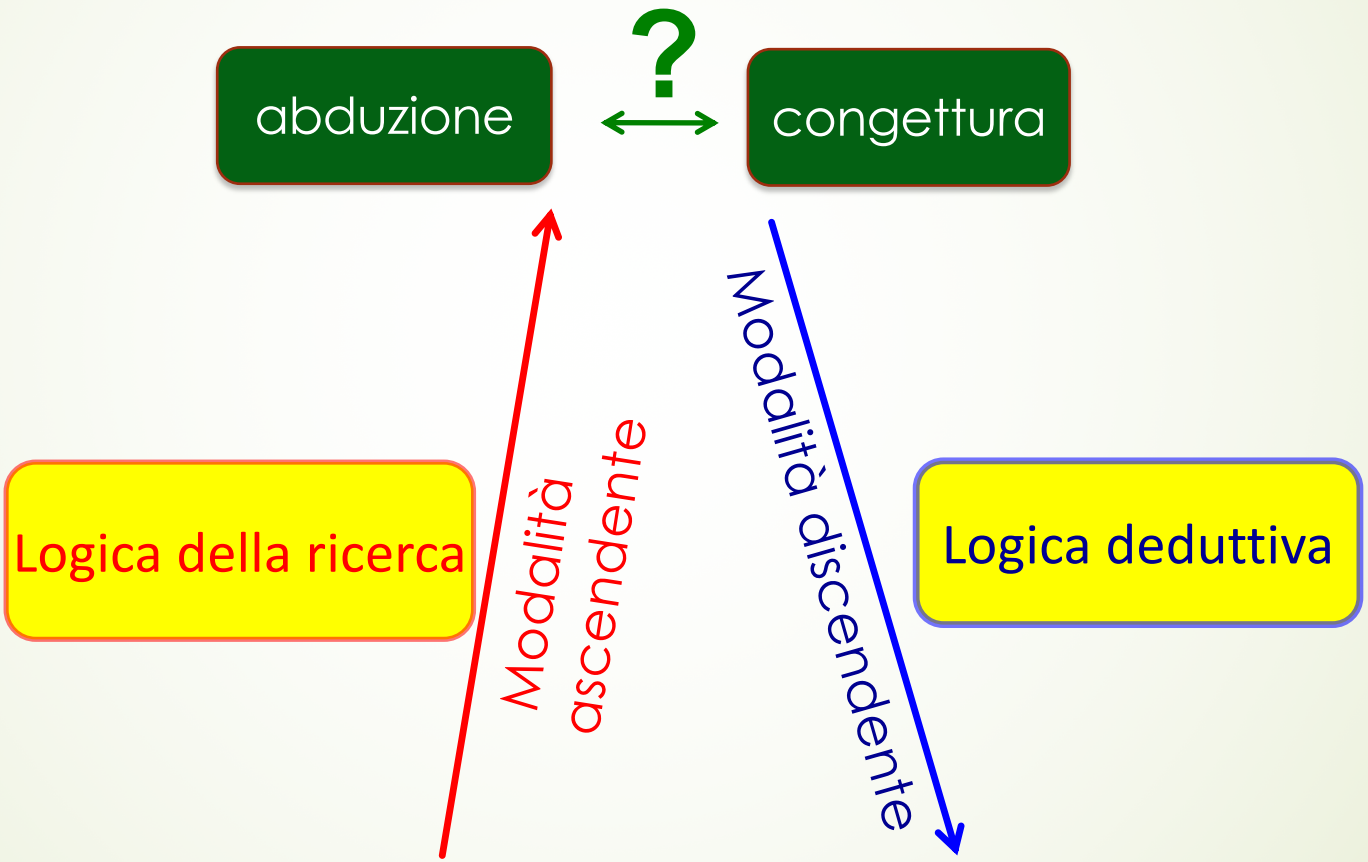
Osservo:	A
So che:	C → A
Abduco:	C

Risultato
Regola
Caso

Trascinamento e abduzioni

Si sono individuate e classificate diverse modalità di trascinamento, in base alle intenzioni dello studente e rispetto all'attività di esplorazione in cui è richiesta la formulazione di una congettura.
In particolare, è stato identificato un momento importante di transizione nell'uso di un particolare tipo di trascinamento che implica il mantenimento (durante il movimento) di una particolare proprietà, ritenuta interessante dall'esploratore. L'uso di questo tipo di trascinamento è stato messo in relazione con un inversione del tipo di controllo esercitato sulla figura e con la produzione di un'inferenza di tipo abduttivo nell'attività di congettura.

L'abduzione: cerniera tra logica della ricerca e logica deduttiva



Indice

1. Instrumentazione
2. Trascinamento
3. Covariazione
4. Abduzione
5. Embodiment

I legami tra trascinamento ed embodiment

Si intuisce dagli esempi col trascinamento quanto il ruolo dei meccanismi percettivo-gesturali interagisca con aspetti concettuali, stimolando la ricerca di invarianti di primo e secondo livello attraverso i meccanismi di feed-back tra aspetti visivi, dinamici, motori, la genesi di processi abduttivi e le modalità di controllo che supportano il passaggio tra questi e i processi deduttivi.

Oggi ricerche più sofisticate, per es. con l'eye-tracking, permettono di approfondire anche in modo quantitativo i meccanismi prima illustrati qualitativamente.



I legami tra trascinamento ed embodiment

L'impostazione generale degli studi sull'embodiment si basa sull'assunto che corpo e mente non possono essere separati e che una visione dualistica su di essi è inappropriata.

La cognizione non è considerata un affare esclusivamente mentale, ma si basa su esperienze corporee che si svolgono in interazione con il mondo fisico e sociale.

L'embodiment "è l'ipotesi sorprendentemente radicale che il cervello non sia l'unica risorsa cognitiva che abbiamo a disposizione noi per risolvere i problemi" (Wilson & Golonka, 2013, p.1).

Anche nel caso della matematica, spesso considerata una materia altamente astratta e mentale, la cognizione è sempre più riconosciuta come radicata nelle attività percettivo-gesturali e gli oggetti matematici sono radicati negli schemi ad esse collegate.

In generale gli studi sull'uso degli strumenti nell'insegnamento della matematica hanno evidenziato il loro ruolo come 'prolungamenti' del corpo (es. tipico: i processi di strumentazione).

In questi ultimi anni l'attenzione si è anche concentrata sulle modalità con cui la tecnologia digitale possa offrire opportunità per creare esperienze embodied (es: N. Sinclair, R. Nemirovsky, E. de Freitas, F. Ferrara, G. Ferrari, O.Robutti, F.Arzarello).

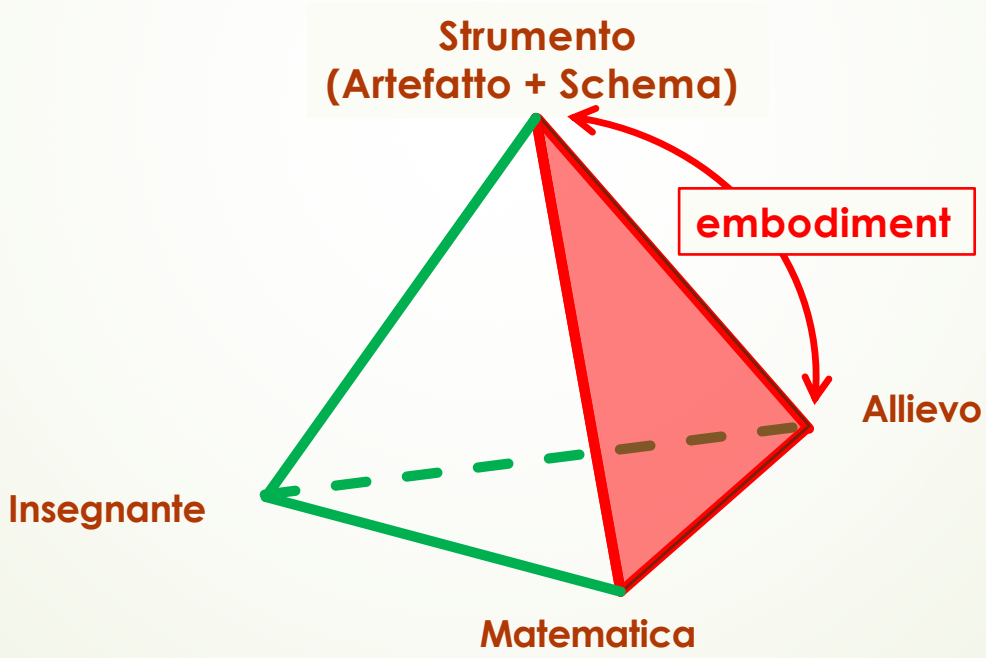
Tali metodi embodied spesso si ispirano al programma delle quattro E per la cognizione: embodied, extended, embedded, enactive.



https://4ecognitiongroup.wordpress.com/

A prima vista, potrebbe sembrare che esista una tensione tra questa visione embodied della cognizione e l'uso della tecnologia digitale nell'educazione matematica.
I modi di interagire con questi strumenti non sono stati finora molto "basati sul corpo", poiché l'interazione avveniva principalmente attraverso i tratti della tastiera in un passato più remoto e attraverso i movimenti del mouse nel passato più recente.
I recenti sviluppi tecnologici, tuttavia, aprono nuovi orizzonti per rendere giustizia alla multimodalità nella conoscenza matematica. Sono state sviluppate interfacce utente che permettono esperienze embodied: schermi multitouch, sensori di movimento, augmented reality.

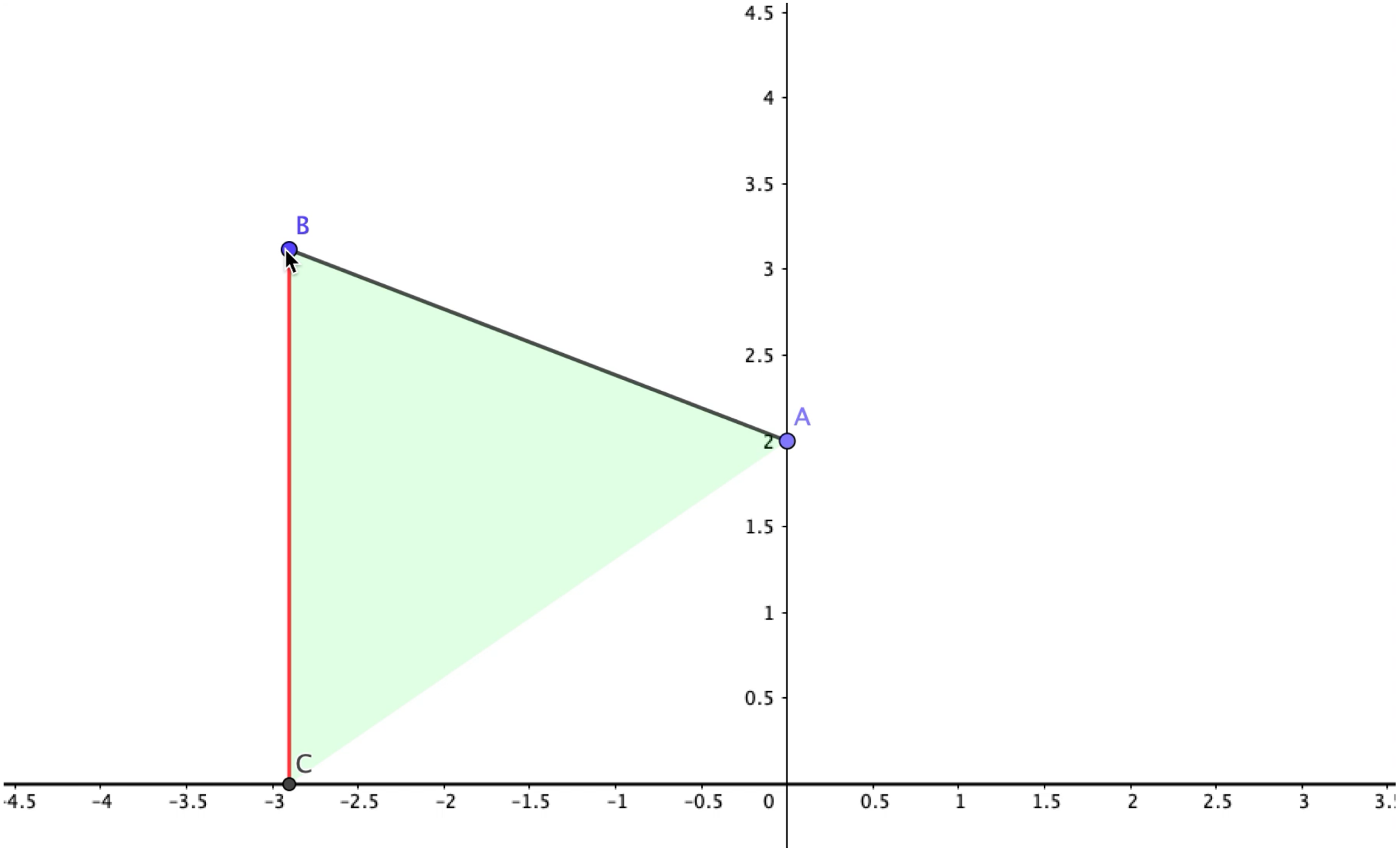
Queste modalità offrono nuove risorse alla progettazione didattica e arricchiscono il quadro dell'instrumentazione sia teoricamente sia praticamente in quanto si configura un nuovo tipo di rapporto con gli strumenti.

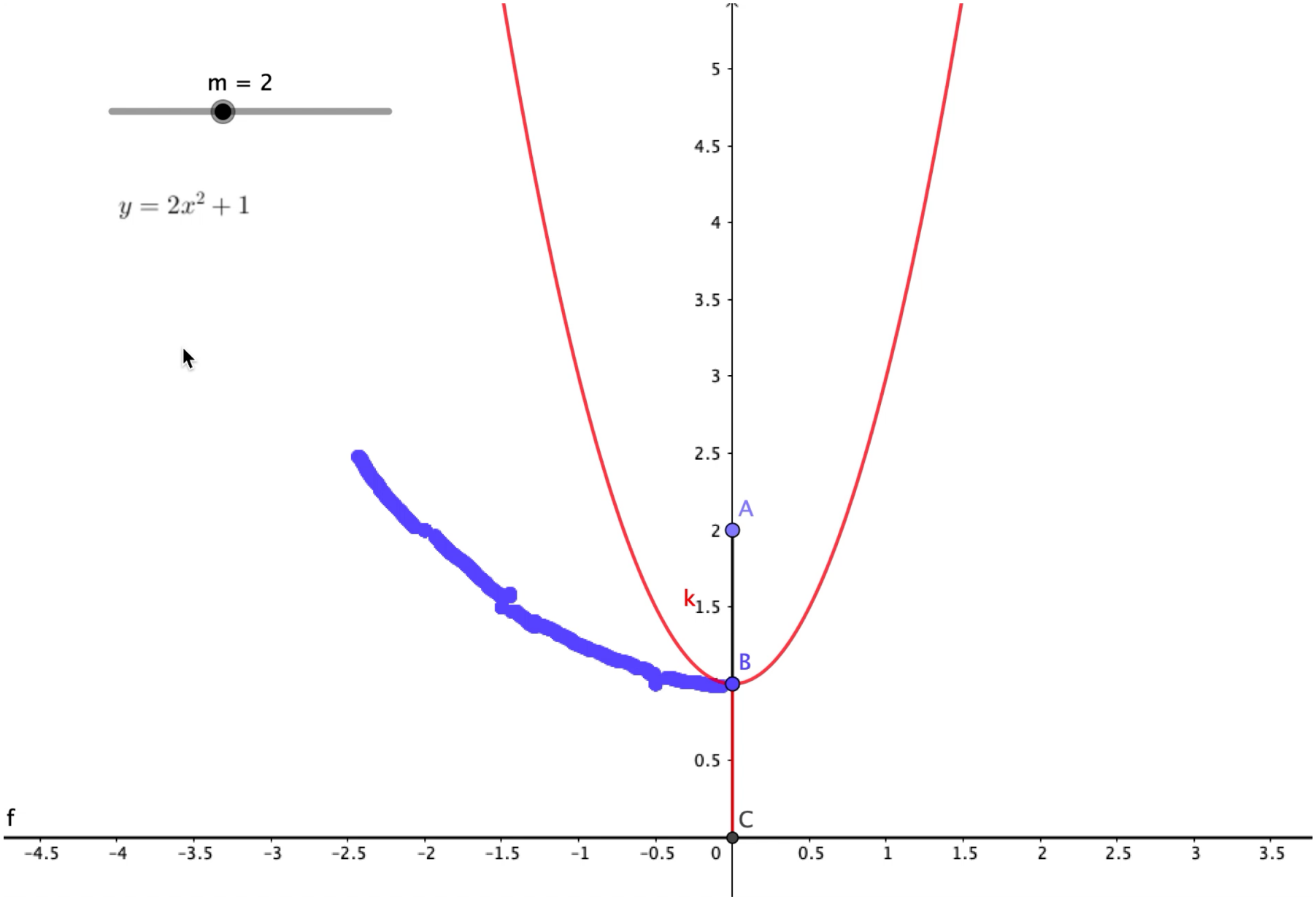


Le complesse coordinazioni senso-motorie che risultano mettono in luce interessanti conseguenze didattiche e inquadrano i processi di instrumentazione sotto una nuova promettente luce.

Cercherò di illustrarlo con un esempio, elaborato liberamente da una ricerca di A. Shvarts (Mosca) e Dor Abrahamson (Berkeley).

A.Shvarts & D.Abrahamson, Dual-eye-tracking Vygotsky: A microgenetic account of a teaching/ learning collaboration in an embodied-interaction technological tutorial for mathematics (2019). Learning, Culture and Social Interaction, 22,

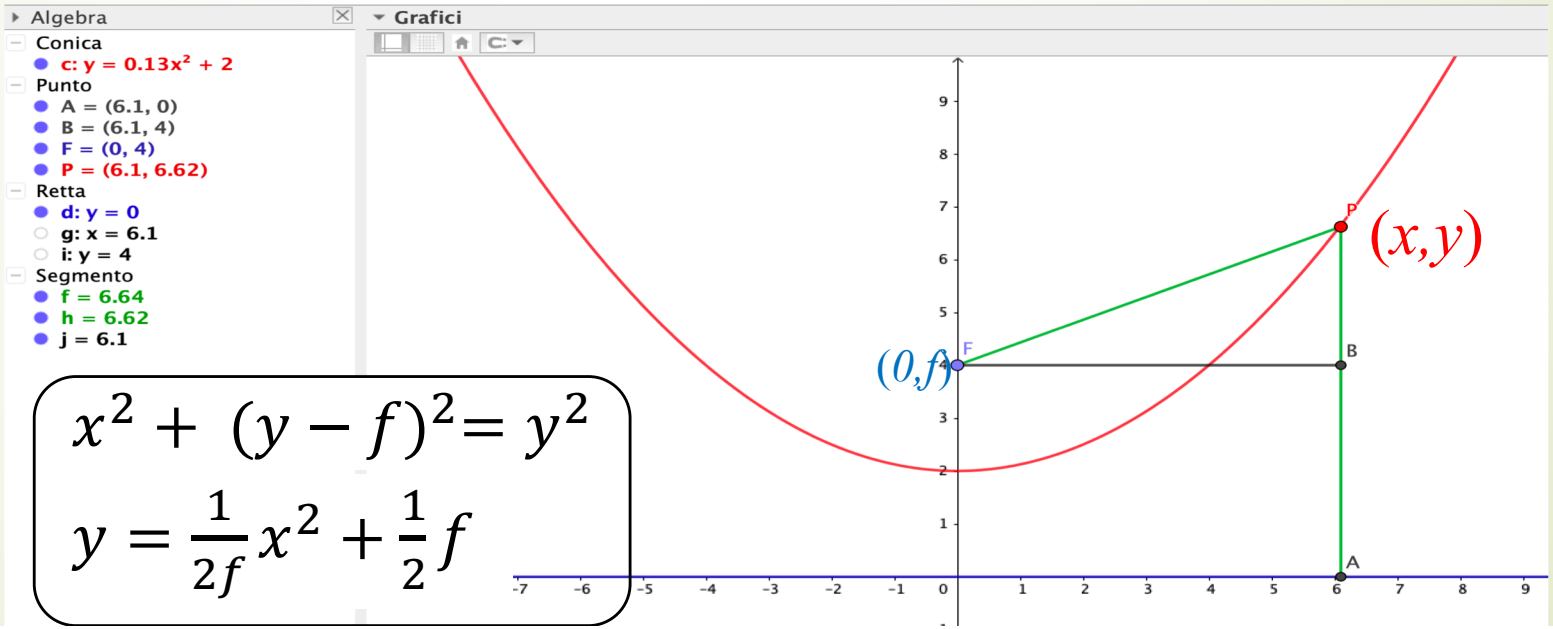

B
A
C
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


m = 2
$y = 2x^2 + 1$
A
B
C
k
f
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

L'esempio illustra come un metodo progettuale embodied possa portare a compiti in cui le esperienze sensomotorie costituiscono la base della cognizione matematica.
Questo può avere conseguenze cognitive e didattiche (come l'articolo di Shvarts e Abrahamson mette in luce), ma anche epistemiche (sulle modalità con cui le conoscenze matematiche sono apprese) in base a una loro continua ristrutturazione nella progettazione didattica.

Per esempio, il problema della parabola nella formulazione Standard, suona:
Una parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso (detto fuoco) e da una retta (detta direttrice).

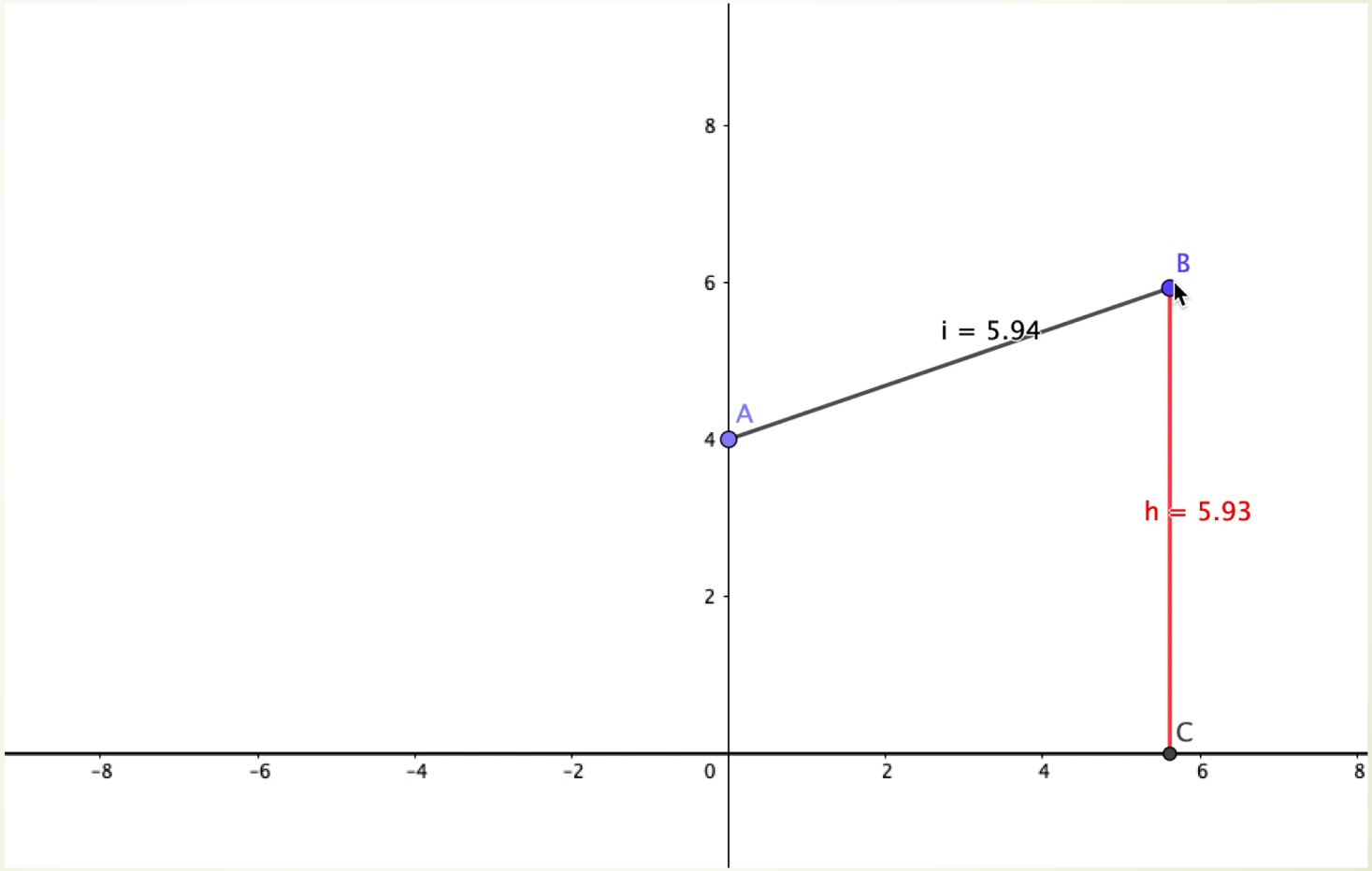
Sono possibili più trasposizioni in forma aperta, che formulano il problema in modo diverso.



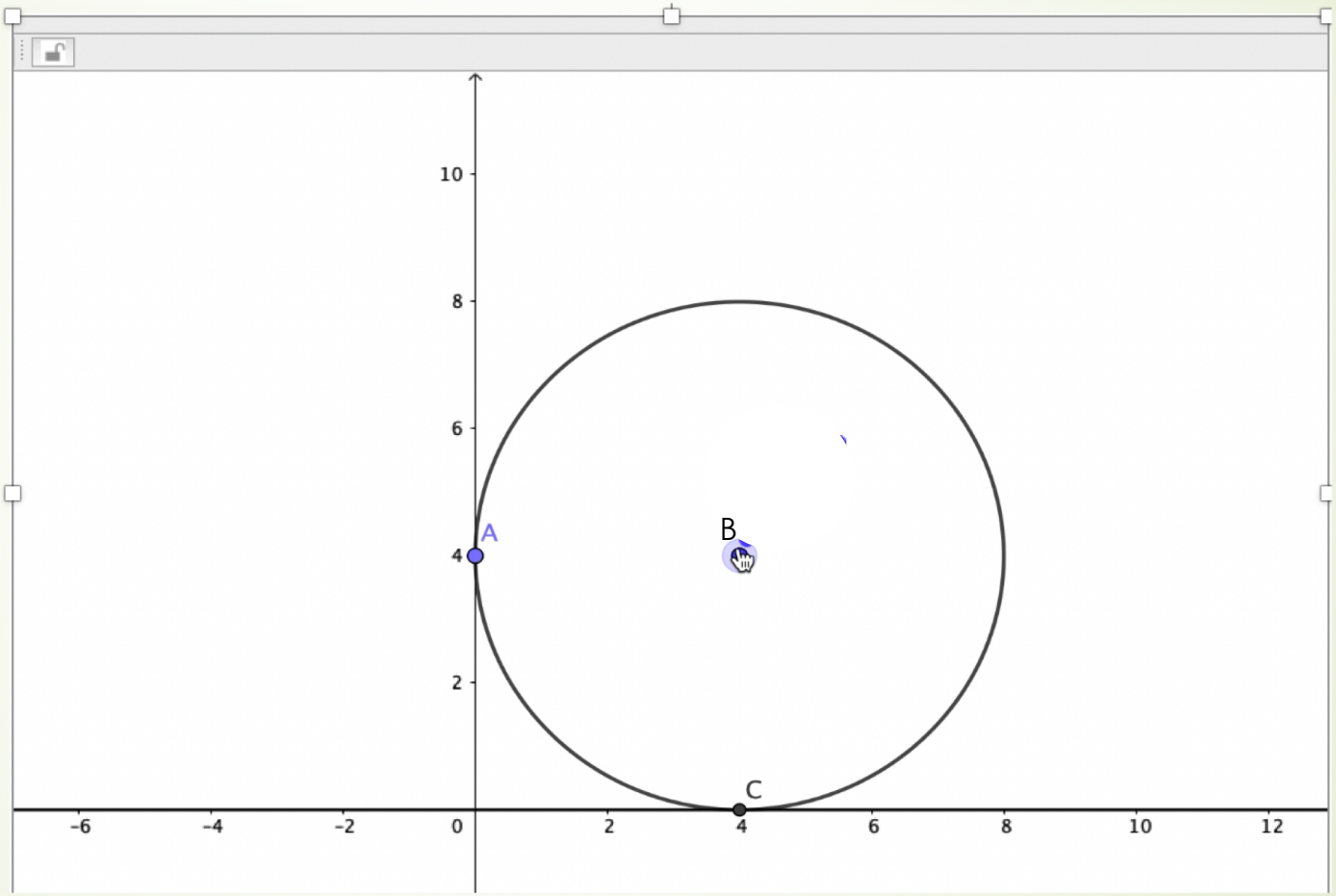
$$x^2 + (y - f)^2 = y^2$$

$$y = \frac{1}{2f}x^2 + \frac{1}{2}f$$

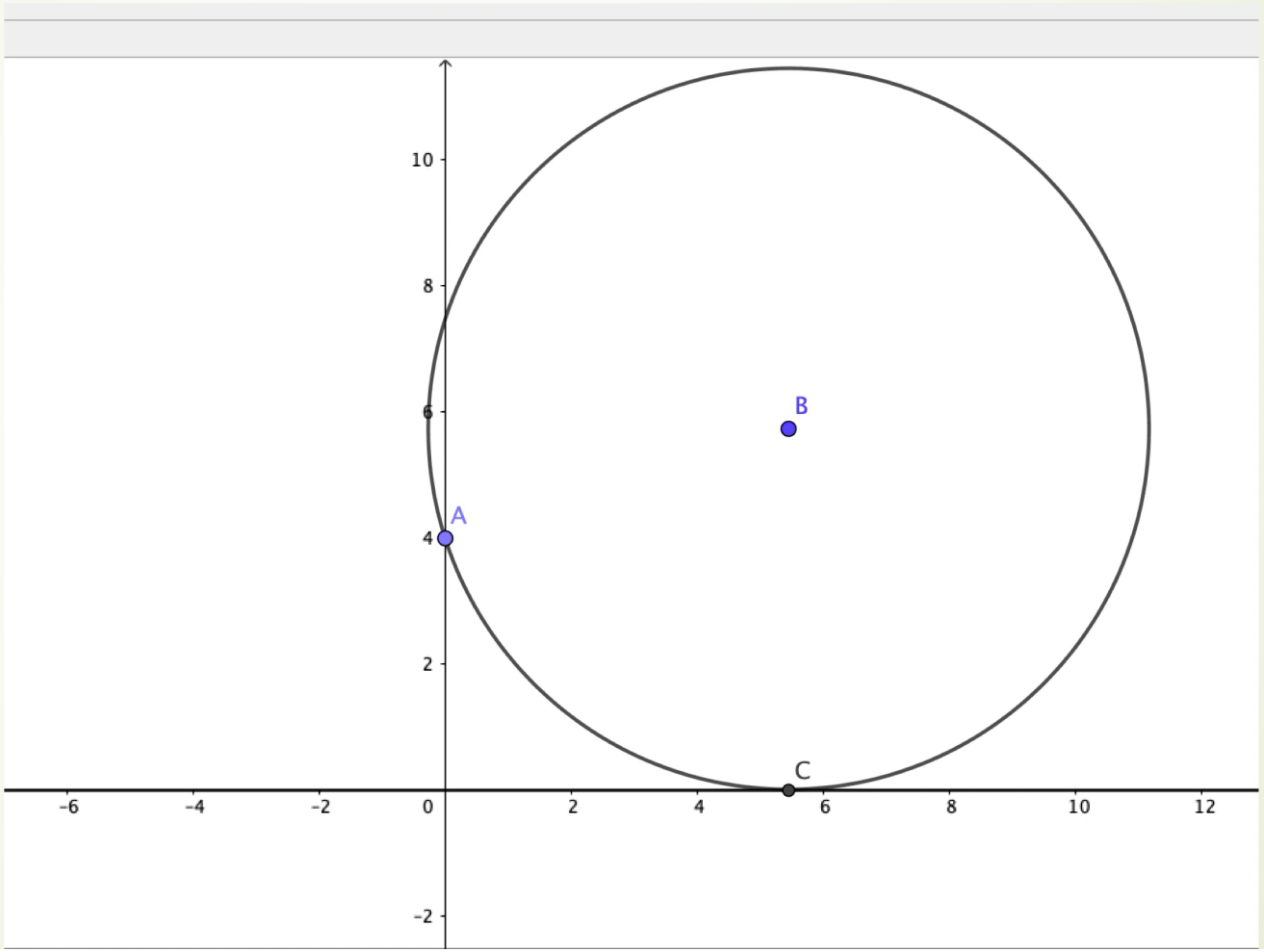
A1. Sono dati la retta d e il punto F. Esplora il luogo dei punti equidistanti da d ed F.



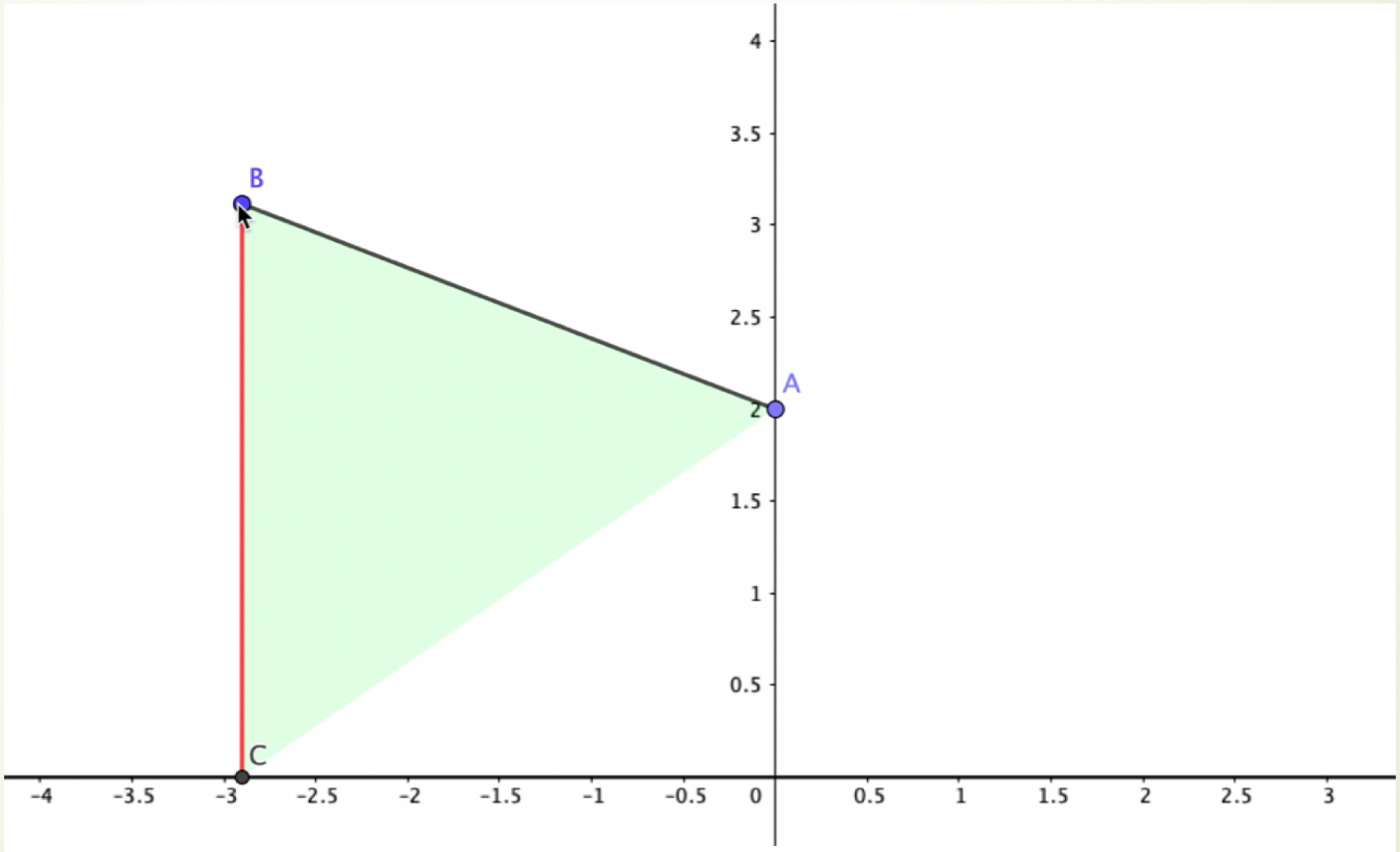
A2. Sono dati la circonferenza di centro B. Muovere B in modo che la circonferenza sia ancora tangente agli assi.



A2. Sono dati la circonferenza di centro B. Muovere B in modo che la circonferenza sia ancora tangente agli assi.



A3. Muovere B e congetturare sotto quali ipotesi il triangolo ABC è verde.



La genesi strumentale nei tre casi cambia in quanto cambia la mediazione indotta dal trascinamento.

Si hanno così tre diverse modalità:

- delle pratiche indotte nell'ambiente di GD;
- delle proprietà matematiche su cui si basa la proprietà S della parabola;
- dei processi cognitivi indotti negli studenti.

Essa quindi avrà conseguenze diverse su come si educano gli allievi a vedere/concettualizzare gli oggetti matematici.

Un commento finale



Scrive L. Radford (2010):
«Gli occhi del matematico sono stati educati culturalmente a organizzare la percezioni delle cose in specifiche modalità razionali. Sono così stati sottoposti a un lungo processo di addomesticazione. L' addomesticazione dell'occhio è un lungo processo nel corso del quale veniamo a vedere e riconoscere le cose secondo mezzi culturalmente efficienti. Ora, mentre gli insegnanti non possono instillare nei loro studenti direttamente la conoscenza, ciò che possono fare è di creare le condizioni perché i loro studenti possano trasformare un oggetto di conoscenza in un oggetto di coscienza».
In questo, la tecnologia, con le varie forme di instrumentazione, può dare il suo contributo.