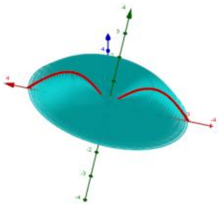
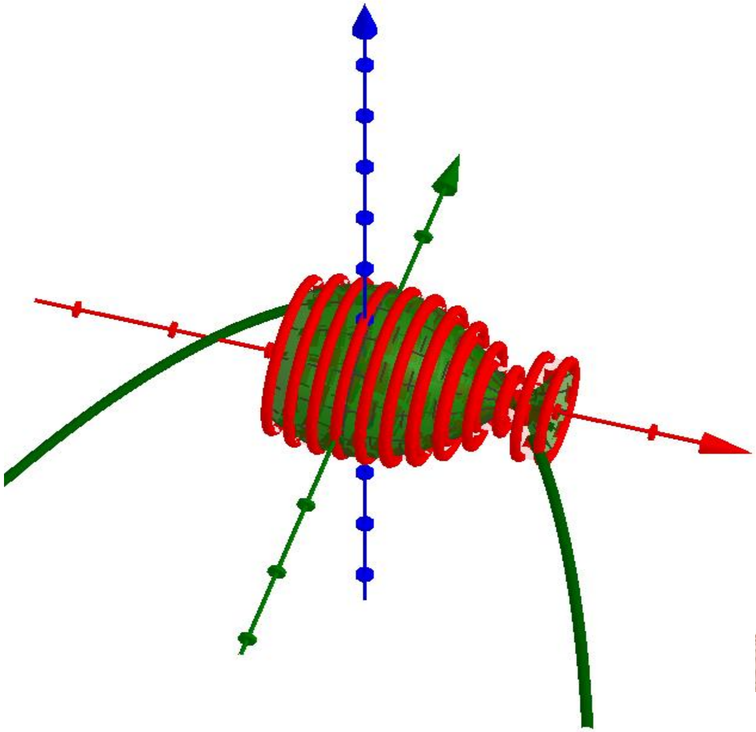
I volumi dei solidi sia di rotazione che di accumulo di superfici: UN PERCORSO CON GEOGEBRA.





Renata Becce e **Daniela Tagliani**

11 ottobre 2019

Giustificazione della formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione

Per il calcolo delle aree esistono già predefiniti i comandi SommaInferiore e SommaSuperiore che aiutano a spiegare il significato geometrico dell'integrale definito.

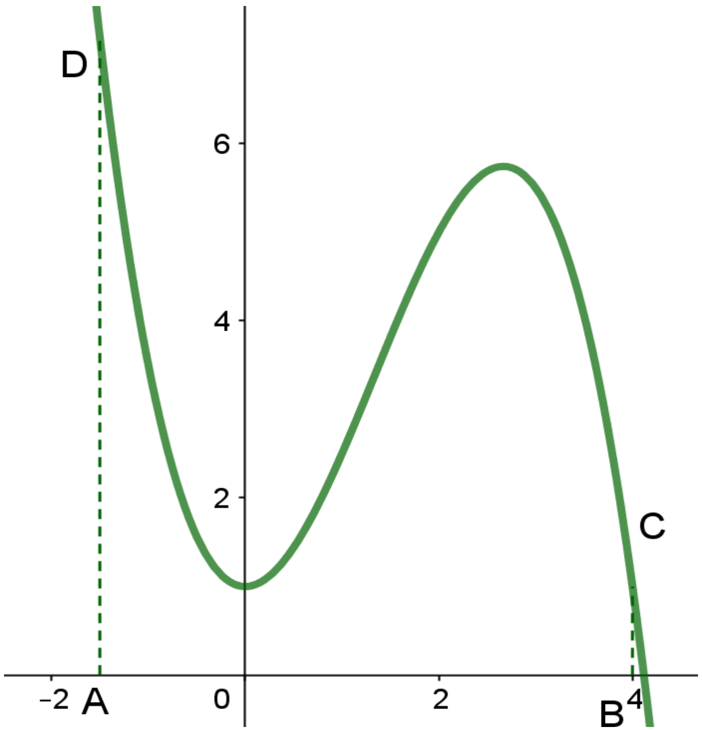
Per il calcolo dei volumi si è

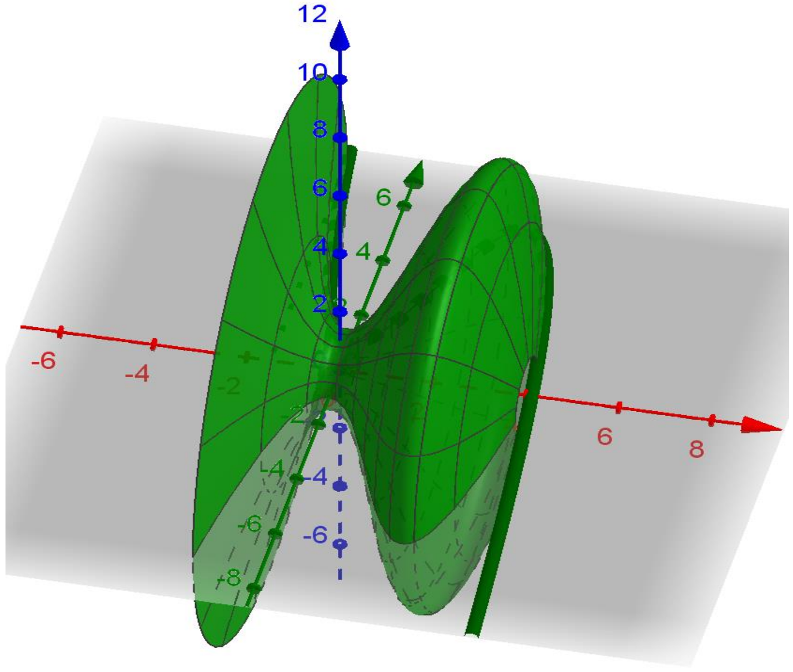
costruito un file che permetta di giustificare la formula

come limite delle successioni dei pluricilindri inscritti e circoscritti.

Volume di un solido di rotazione come limite delle successioni dei pluricilindri inscritti e circoscritti.

Dato un trapezoide delimitato dalla funzione f, dall'asse x e dalle rette x= xmin e x=xmax vogliamo calcolare il volume del solido ottenuto dalla sua rotazione attorno all'asse x.

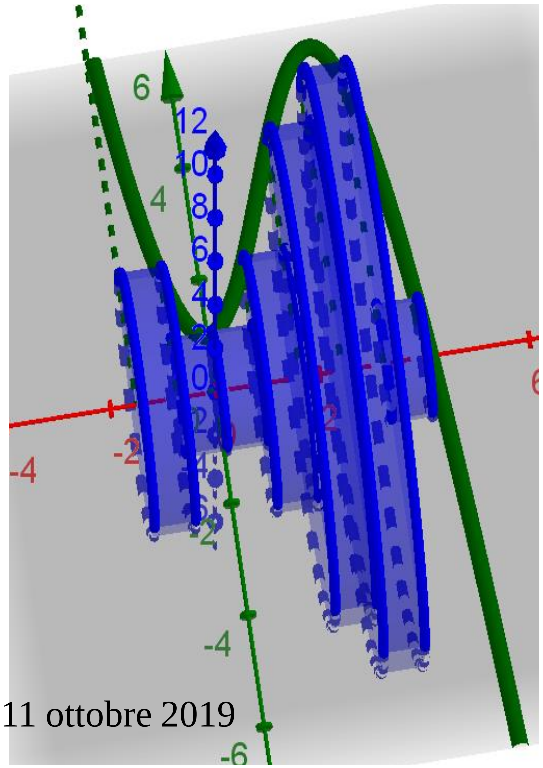




GeoGebra Institute of Milano

Caratteristiche del file

Poiché il programma è abbastanza complesso, conviene utilizzare il *file pronto* consegnando agli alunni una **scheda da completare** con **opportune domande** che guidino l'acquisizione dei concetti fino a trovare **la formula per il volume dei solidi di rotazione**.



Si può modificare il numero n in cui viene suddiviso l'intervallo

Sono presenti dei pulsanti che permettono di vedere o nascondere i pluricilindri ed è possibile fare una scelta tra alcune funzioni .

volumi solidi rotazione.ggb

Possibili domande da proporre nella scheda per gli studenti

- *Scegli una f*
- *Varia l'angolo α*
- *Fai considerazioni sul solido che si forma dalla rotazione della funzione*
- *Visualizza i pluricilindri inscritti e circoscritti, confrontandoli con il solido di rotazione*
- *ogni cilindro ha   altezza =........*

  raggio di base =...........

  volume di un cilindro=..........

quindi il volume dei pluricilindri=....................

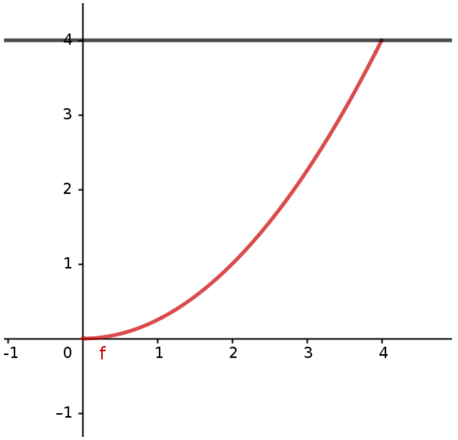
- *Confronta il volume dei pluricilindri circoscritti e inscritti con il volume del solido all'aumentare di n*
- *Il volume può essere considerato come il limite delle successioni dei pluricilindri inscritti e circoscritti, quindi si può arrivare alla definizione alla*

formula $\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

Volume per accumulo di superfici

Del solido S si sa che:

la sua **base** è la parte finita di piano compreso tra la parabola $y=1/4x^2$ nell'intervallo tra 0 e 4 e la retta $y=4$.



Le sue **sezioni con piani perpendicolari** all'asse delle ascisse sono **quadrati**

Qual è l'espressione dell'area della generica sezione ortogonale del solido S?

Quale potrebbe essere l'integrale che permette di calcolare il volume del solido S?

Quanto vale il volume del solido S?

File accumulo di superfici

,

Del solido S si sa che:

la sua **base** è la parte di piano compresa tra

la parabola $y=1/4x^2$, la retta y=4 e l'asse y

le sue **sezioni** con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono **quadrati**

Inserire f(x)=Funzione[1/4x^2,0,4] e y=4

Introdurre lo slider **a [0, 4, passo 0.05]**

Sia **P=(a,f(a)) e Q=(a,4)**

Aprire la finestra grafici 3D

Inserire i **punti P'=(a,f(a),y(Q)-y(P)) e Q'=(a,4,y(Q)-y(P))**

Costruire il **poligono PQQ'P'**

Muovere a per osservare le sezioni

Traccia attiva su poligono ,

Muovere a per visualizzare il solido.

accumulo_quadrati.ggb

ATTIVITÀ: Volume per accumulo di superfici

(da un’idea di Giulia Bini https://laprofbi.wordpress.com/2018/11/15/fette-perfette/)

Dopo aver diviso la classe in gruppi e aver fatto portare loro cartoncini, forbici e colla , si assegna ad ogni gruppo il compito

di **costruire il solido S sapendo che :**

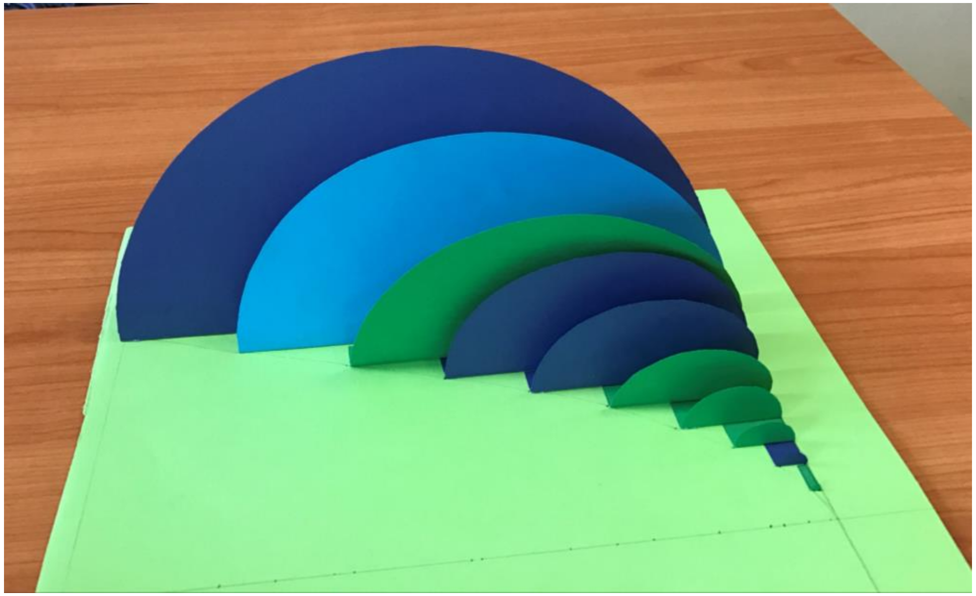
La **sua base** è il trapezoide sotteso dalla parabola $y=x^2$ nell'intervallo tra 0 e 2

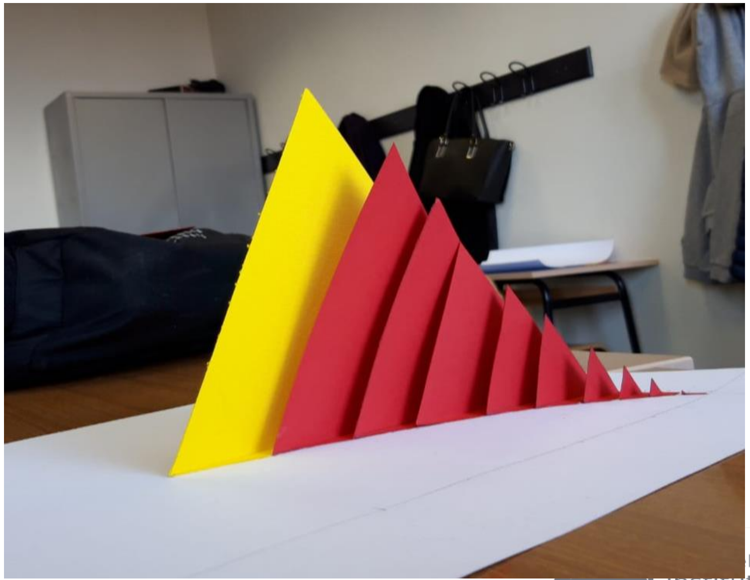
Le **sue sezioni** con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono quadrati oppure triangoli equilateri o semicerchi

A partire da queste informazioni : **costruire con la carta colorata almeno una decina di sezioni del solido S e incollarle sul foglio.**

- Quale è l'espressione dell'area della generica sezione ortogonale del solido S ?
- Quale potrebbe essere l'integrale che permette di calcolare il volume del solido S?
- Quanto vale il volume del solido S?


SINCE 1962
ROWING CLUB
TRAINING CENTER

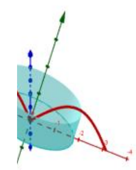




METODO GUSCI CILINDRICI

Il solido, generato dalla rotazione attorno all'asse y di una regione piana, può essere vista come somma di tanti **"Gusci cilindrici"** cioè cilindri CAVI con raggio interno x, esterno x+dx e altezza f(x).

Se dx tende a 0 il cilindro tende alla sua superficie e la somma di tutte le superfici "riempiono" il solido.



Quindi

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Se l'area è compresa tra due funzioni

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)]\, dx$$

File gusci cilindrici

Inserire Funzione [sin(x),0, pi]

Inserire Slider xp [0, pi, passo 0.1]

Sia P il punto sulla funzione di ascissa xp e sia P' la sua proiezione sull'asse x.

Nella rotazione attorno all'asse y il segmento PP' descrive una superficie cilindrica.

Definire O=(0,0,0) e v=(0,1,0)

circ=Circonferenza [O,xp,v]

cil=cilindro[circ,f(xp)]

Sl= SuperficieLaterale[cil]

Traccia attiva su Sl

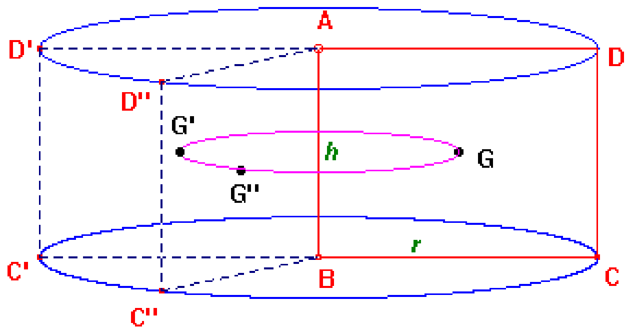
Gusci cilindrici.ggb

TEOREMA DI GULDINO

Enunciato :

Il volume, generato da una superficie piana che ruota attorno ad un asse che non la attraversa, è dato dal prodotto **dell'area della figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro.**

Come arrivare alla formula del teorema di Guldino



Consideriamo ora un ***cilindro circolare retto***, ottenuto per **rotazione di un rettangolo ABCD attorno al lato AB.** Sia ***h* l'altezza del cilindro** (=AB) e ***r* il raggio di base** (=BC).

Indichiamo poi con G il baricentro del rettangolo, supposto omogeneo; G dista *r*/2 da AB.

Per il volume del cilindro si ha allora:

$$V = \pi r^2 h = (2\pi \frac{r}{2})(rh) = (2\pi \frac{r}{2}) A$$

dove *A* è l'area del rettangolo.

Si può cioè concludere che il volume è dato

dall'area del rettangolo per

la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro del rettangolo stesso

Riprendiamo ora in esame il procedimento utilizzato per calcolare il volume di un solido di rotazione come somma dei volumi di infiniti cilindri generati da rettangoli che ruotano.

Detta y_{Gi} l'ordinata del baricentro del generico rettangolo (che si trova a metà della sua altezza), possiamo scrivere la seguente formula approssimata per il volume del solido di rotazione:

$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i=\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_{Gi} A_i=2\pi A\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{Gi} A_i}{A}=2\pi A y_G$$

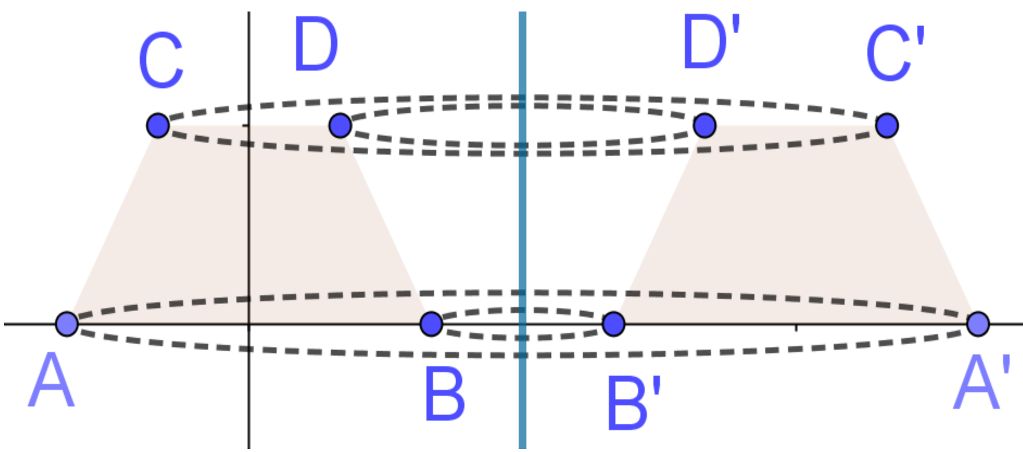
dove ***A* è l'area totale del trapezoide** e

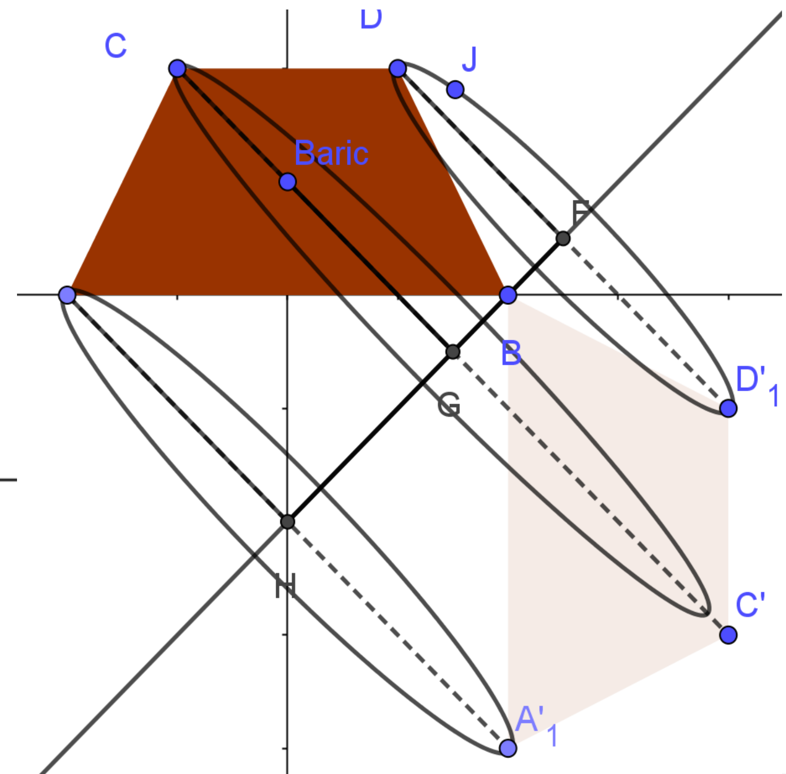
y_G è l'ordinata del baricentro del trapezoide

La formula permette di calcolare le coordinate del baricentro di una figura piana, conoscendo la sua area e il volume del solido generato dalla rotazione attorno ad un asse

Applicazioni Guldino

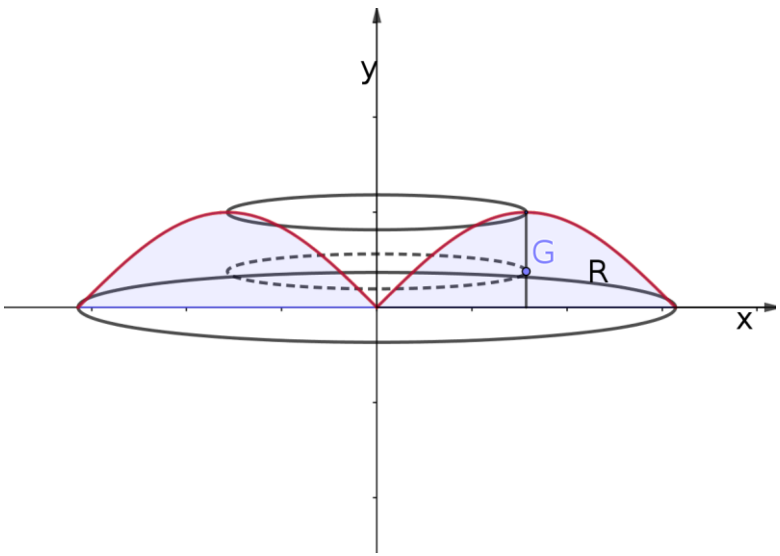
Guldino è comodo per il calcolo dei volumi di solidi di rotazione se si conosce in qualche modo il baricentro (in particolare se la figura ha simmetrie) e per le rotazioni attorno a rette che non siano gli assi cartesiani.





PNI Ord. 2011 Q3

Sia ***R*** la regione delimitata, per xε [0,pi] dalla curva ***y = sen x*** e dall'asse ***x*** e sia ***W*** il solido ottenuto dalla rotazione di ***R*** attorno all'asse y. Si calcoli il volume di ***W***.



Il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando la regione R attorno sull'asse y si può determinare usando il teorema di Guldino.

Il volume è dato dal prodotto dell'area della regione R, che è 2, per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro G della regione R.

Non occorre determinare l'ordinata del baricentro di R perchè basta conoscere la sua ascissa, che per ragioni di simmetria è $x_G = \frac{\pi}{2}$

La circonferenza descritta dal baricentro G di R ha quindi lunghezza

$$C = 2\pi\frac{\pi}{2} = \pi^2$$

Il volume del solido di rotazione W che si ottiene ruotando R attorno all'asse Y è dato da:

$$Volume(W) = 2\pi x_G . Area(R) = \pi^2 .2 = 2\pi^2 = 19.74$$