



TUTTI INSIEME.. ALLINEATAMENTE!



Herbert Agli¹, Ester Bertolotto², Elisa Gentile³,
Cristina Mares⁴, Ornella Robutti⁵

¹ Liceo Valdese di Torre Pellice (TO)

² Laureanda in Matematica, Università di Torino

³ I.I.S. Majorana, Moncalieri (TO)

⁴ I.I.S. Amaldi-Sraffa, Orbassano (TO)

⁵ Università di Torino - Dipartimento di Matematica

Contesto

- ▶ Attività progettata dal Team SSPM (Scuole Secondarie Potenziate in Matematica)
- ▶ Proposta ai docenti che frequentano il corso di formazione
- ▶ Rivolta agli studenti del TERZO ANNO di scuola secondaria di II grado
- ▶ Sperimentata nelle classi del Liceo Potenziato in Matematica:
 - ▶ Liceo Valdese di Torre Pellice (TO)
 - ▶ I.I.S. Amaldi-Sraffa di Orbassano (TO)
- ▶ Proposta agli allievi nel corso del primo periodo didattico della classe terza

Dalle Indicazioni Nazionali

Primo Biennio

Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, **rette** e **fasci di rette** nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità.

Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle **rette** e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita [...].

Apprenderà gli elementi della teoria della **proporzionalità diretta** e inversa.



Approcci in continuità?

Secondo Biennio

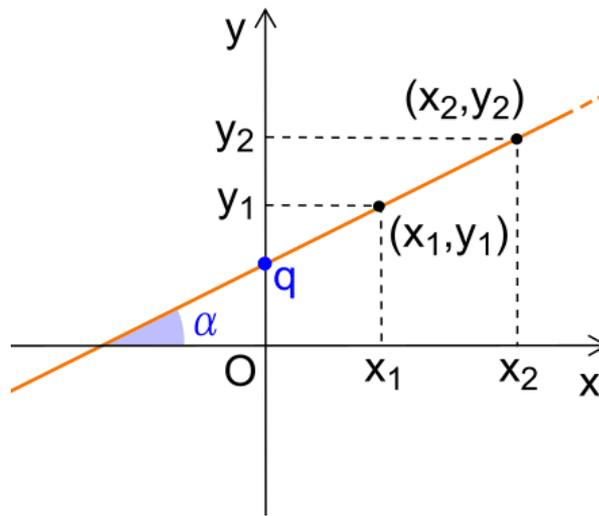
Le **sezioni coniche** saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico.

Studierà [...] la nozione di **luogo geometrico**, con alcuni esempi significativi.

Dalla pratica didattica

$$y = mx + q$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

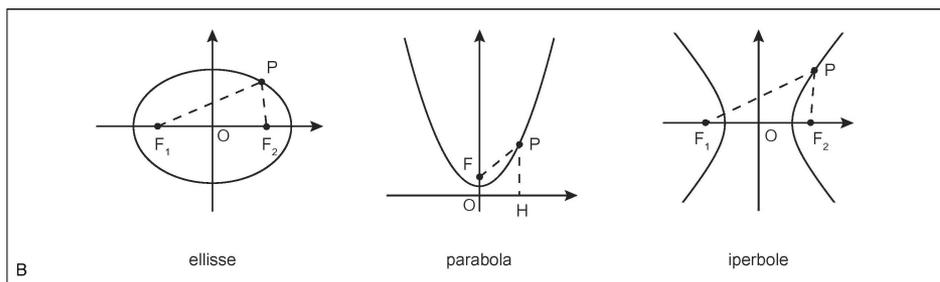
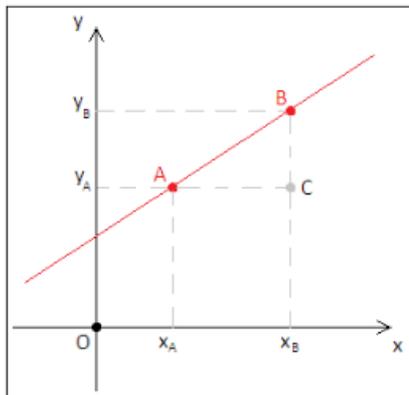


Che cosa hanno in comune?

$$ax + by + c = 0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La retta può essere vista come luogo geometrico?





Task Design

- Obiettivi
 - Retta come luogo geometrico
 - Caratteristica di allineamento tra punti
- Differenti approcci
 - Sintetico
 - Analitico
- Differenti materiali e strumenti
 - Carta piegata
 - Software di geometria dinamica
 - Materiali poveri
- Costruzione di vari Task
 - Scheda docente
 - Scheda studente
- Modello di attività altamente adattabile a differenti situazioni didattiche

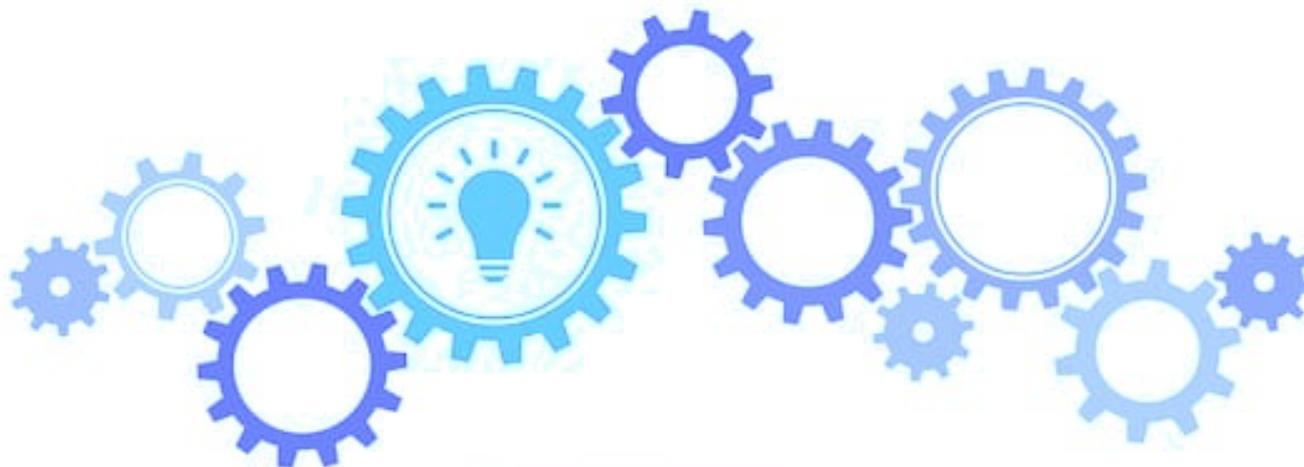




DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



E ora... al lavoro



Piano Lauree Scientifiche
In collaborazione con MIUR, con Scienze, Confindustria



DIFIMA 2019 - 11 ottobre 2019



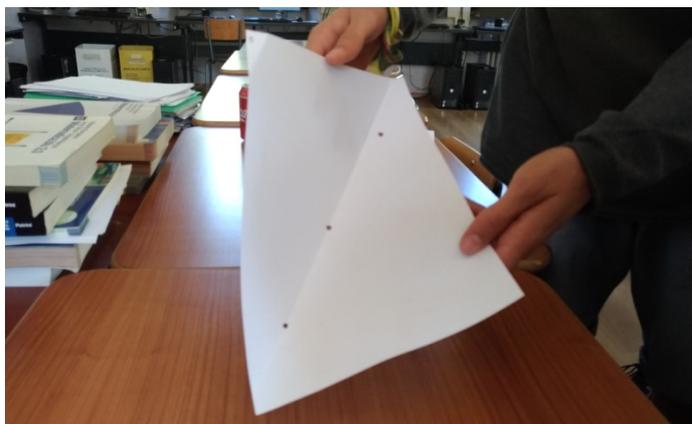
OBIETTIVI

- Concetti di pendenza e di allineamento
- Costruire equazioni di luoghi di punti a partire dal riconoscimento di proprietà invarianti
- Esercitare la dimostrazione matematica
- Usare parametri e costruire equazioni parametriche
- Individuare relazioni funzionali
- Utilizzare registri differenti
- Passare dal discreto al continuo
- Raggiungere padronanza della descrizione matematica del moto rettilineo nel piano





LE RETTE E GLI ORIGAMI



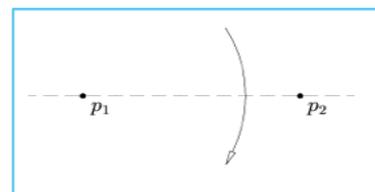
Il foglio di carta come
modello di piano

- Ruolo attivo degli studenti
- Controllo visivo e manuale simultanei

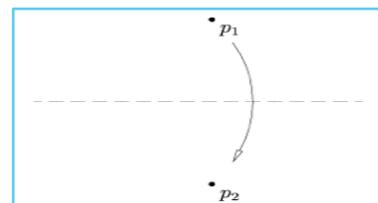


Gli assiomi di Huzita - Hatori

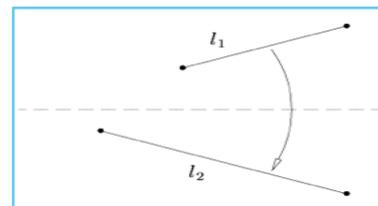
Assioma 1: dati due punti p_1 e p_2 , c'è un'unica piega che passa per entrambi.



Assioma 2: dati due punti p_1 e p_2 , c'è un'unica piega che porta p_1 su p_2 .

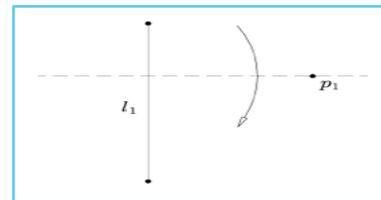


Assioma 3: dati due linee l_1 e l_2 , c'è una piega che porta l_1 su l_2 .

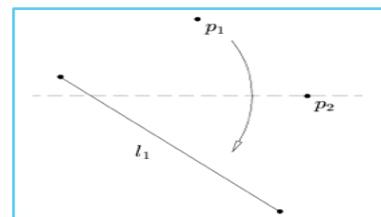


Gli assiomi di Huzita - Hatori

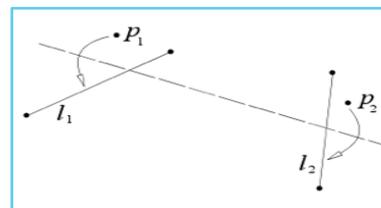
Assioma 4: dati un punto p_1 e una linea l_1 , c'è un'unica piega perpendicolare a l_1 che passa da p_1 .



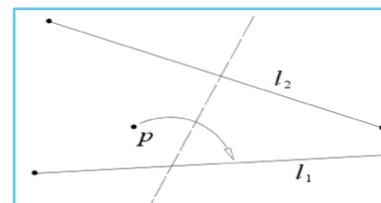
Assioma 5: dati due punti p_1 e p_2 e una linea l_1 , c'è una piega che porta p_1 su l_1 e che passa da p_2 .



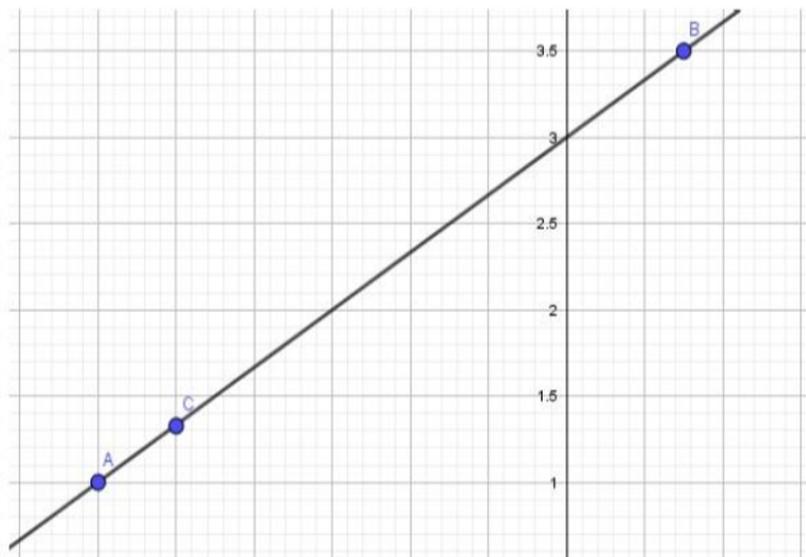
Assioma 6: dati due punti p_1 e p_2 e due linee l_1 e l_2 , c'è una piega che porta p_1 su l_1 e p_2 su l_2 .



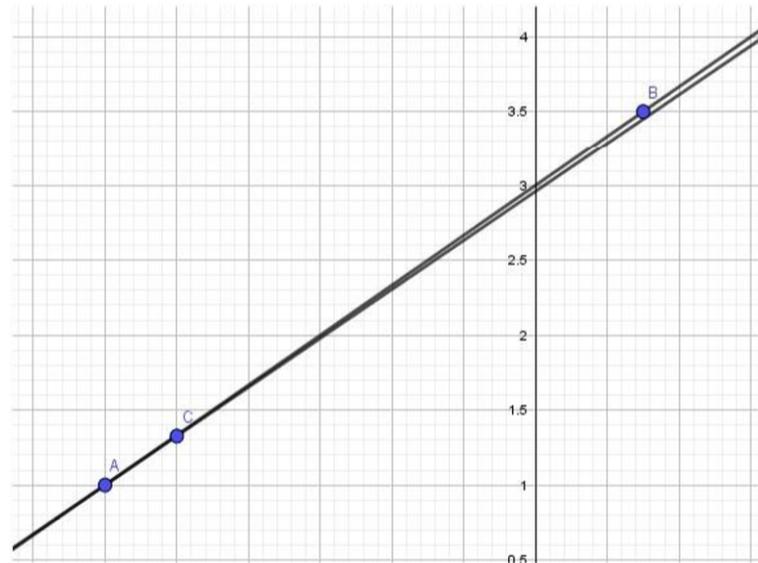
Assioma 7: Assioma 7: dato un punto p e due linee l_1 e l_2 , c'è una piega che porta p su l_1 ed è perpendicolare a l_2 .



Con GEOGEBRA



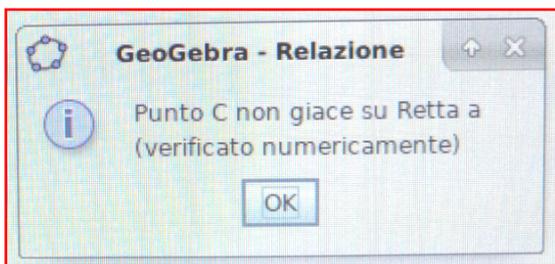
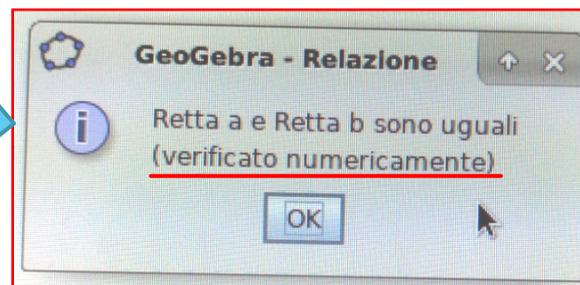
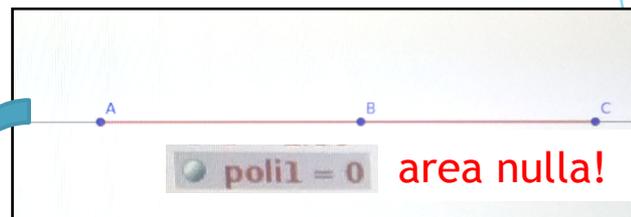
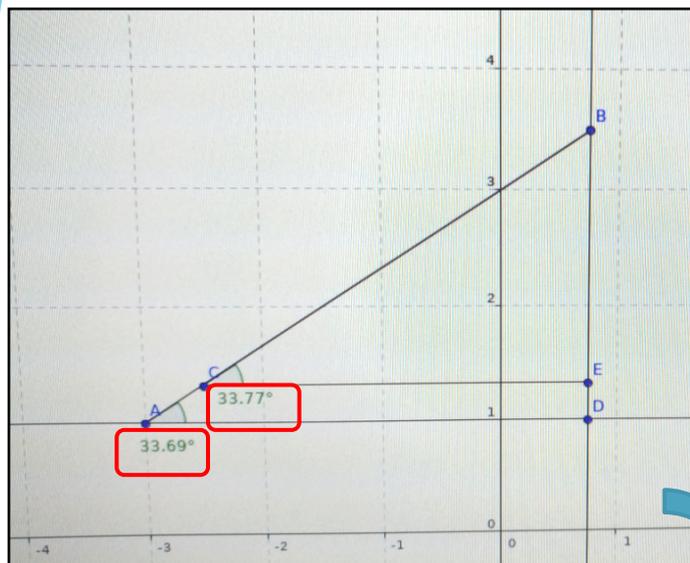
*La retta passante per i punti A e B
sembra passare anche per C*



*Tracciando la retta passante per i
punti A e C si osserva che non
risulta passante per B*



Stiamo dimostrando ?





Nessun utilizzo del
procedimento analitico



ATTIVITÀ 2

Aprire un nuovo file di GeoGebra con vista grafica e assi.
Disegnate i punti di coordinate A(-3; 1), B(3/4; 7/2),
C(-5/2; 199/150).

Sono allineati? Perché? NO, PERCHÉ NON APPARTENGONO ALLA
STESSA RETTA.

Come potete verificarlo? FACENDO PASSARE UNA RETTA
PER DUE PUNTI, ANCHE L'ALTRO PUNTO APPARTIENE ALLA STESSA
RETTA. FACENDO PASSARE TUTTE LE RETTE POSSIBILI TRA I TRE PUNTI, SE
SONO ALLINEATE, ANCORA APPARTENGONO ALLA STESSA, SE ALTRIMENTI
A RETTE DIVERSE. ALLORA NO. IN QUESTO CASO NON SI SONO RAPPRESO.

Siete in grado di trovare un altro metodo per verificarlo? ATTRAVERSO IL TEOREMA CHE
DICE CHE PER TRE PUNTI NON ALLINEATI PASSA UNA CIRCONFERENZA.

ATTIVITÀ 2

Aprire un nuovo file di GeoGebra con vista grafica e assi.
Disegnate i punti di coordinate A(-3; 1), B(3/4; 7/2),
C(-5/2; 199/150).

Sono allineati? Perché? NO, perche' C non appartiene
alla retta.

Come potete verificarlo? sostituendo all'interno dell'equazione
della retta passante per A e B, il valore di x e y di C.
l'uguaglianza:
equazione della retta: $-2,5x + 3,75y = 11,25$
 $-2,5 \cdot (-2,5) + 3,75 \cdot 199 = 11,25$
 $6,25 + 4,9875 = 11,25 \rightarrow 11,2375 = 11,25$ [NO]

Siete in grado di trovare un altro metodo per verificarlo?
Se si fa passare una seconda retta per C e per A o per C e per B,
esse avranno un coefficiente angolare diverso confrontato
a quello della retta passante per B e A.



2 metodi analitici

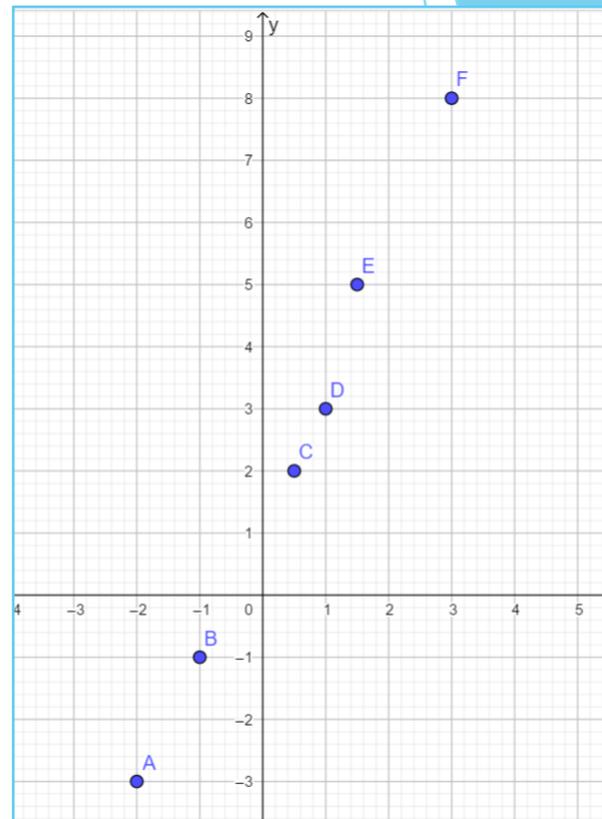




RETTITUDINE

Non è sufficiente confrontare solo la pendenza delle coppie di punti date

$$\begin{aligned}
 m(AB) &= \frac{4B-4A}{x_B-x_A} = \frac{-2+3}{-2+2} = \frac{1}{0} \text{ (non definita)} \\
 m(AC) &= \frac{3-2}{2-2} = \frac{1}{0} \text{ (non definita)} \\
 m(BC) &= \frac{3-2}{2-2} = \frac{1}{0} \text{ (non definita)} \\
 m(AD) &= \frac{3-2}{1-2} = -1 \\
 m(AC) &= \frac{2+3}{\frac{1}{2}+1} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} \\
 m(BC) &= \frac{3+1}{1+1} = 2
 \end{aligned}$$



Alla luce della risposta precedente potete affermare che tutti i punti sono allineati? Perché? Quali e quanti controlli dovrete fare per essere certi che tutti i punti siano allineati?

non sono allineati perché le pendenze e sempre lo stesso ma l'intercetta non

l'intercetta no

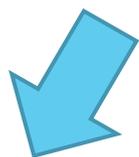




La retta come luogo di punti

Una retta passante per due punti qualunque del piano può pertanto essere identificata come un luogo geometrico: quale?

Data una retta passante per due punti A e B , un terzo punto C giace su questa se il coefficiente angolare tra A e B e B e C è uguale



Equazione del fascio proprio di rette noto il centro



Equazione della retta passante per due punti assegnati

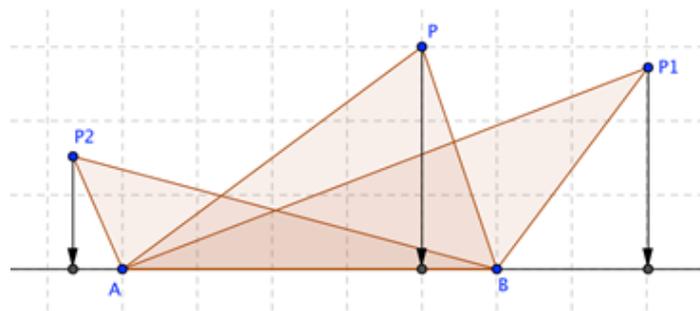
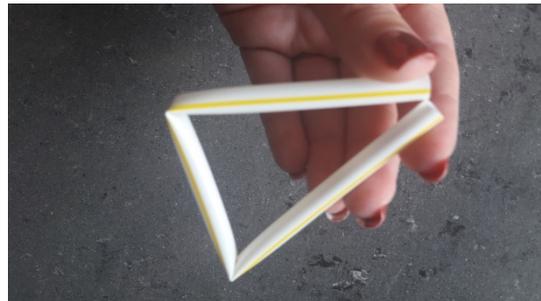
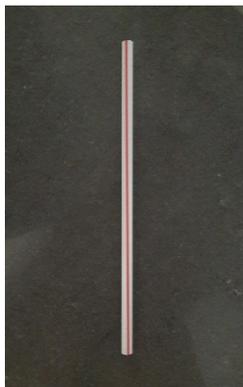




DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



DALLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE ALL'UGUAGLIANZA



Piano Lauree Scientifiche

In collaborazione con MIUR, con Scienze, Confindustria





Considerate ora i punti $O(0; 0)$, $G(1; 1)$ e il generico punto $P(x; y)$. Quali relazioni fra le distanze devono essere verificate affinché P sia allineato con O e G ? E' importante tener conto della posizione di P rispetto ad O e G ?

$OQ = OP + GP \rightarrow$ se P appartiene ad OG
 $OP = OG + GP \rightarrow$ se P appartiene alla semiretta uscente da G
 $GP = OG + OP \rightarrow$ se P appartiene alla semiretta uscente da O

Gli studenti evidenziano le 3 relazioni possibili

Considerate ora i punti $O(0; 0)$, $G(1; 1)$ e il generico punto $P(x; y)$. Quali relazioni fra le distanze devono essere verificate affinché P sia allineato con O e G ? E' importante tener conto della posizione di P rispetto ad O e G ?

$P < O$ $OP - OG = PO$ $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $O < P < G$ $OP + PG = OG$ $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}$ $-\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $P > G$ $PO = OG + GP$ $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2}$

Che cosa vi aspettate di ottenere dallo sviluppo delle precedenti relazioni?





$$\sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2}$$

$$(1-x)^2 + (1-y)^2 = (0-x)^2 + (0-y)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2 + 2\sqrt{2} \cdot x \cdot y$$

$$1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 = x^2 + y^2 + 1 + 1 + 2\sqrt{2}x \cdot y$$

$$-2x - 2y = 2\sqrt{2}x \cdot y$$

$$2xy + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xy^2 \quad (x-y)^2$$

Cosa avete ottenuto? $x=y$

È ciò che vi aspettavate? $x=y$. Sì, perché il punto sarebbe appartenuto alla bis. I-III quadrante lo stesso.

Cosa avete ottenuto? un'equazione di 2° grado

È ciò che vi aspettavate? No, perché è un'equazione di 2° grado e noi ci aspettavamo una di primo.

Cosa avete ottenuto? L'equazione non è una retta

È ciò che vi aspettavate? NO, RAGIONANDO GEOMETRICAMENTE IN QUANTO PUNTI SIMILMENTE APPARTENONO AD UNA STESSA RETTA, MA RAGIONANDO ALGEBRICAMENTE SI PUÒ NOTARE CHE SU UN PIANO CHE ~~HA~~ ~~OTTENGONO~~ ~~PER~~ ~~TANTUM~~ DI SECONDO GRADO.

La scelta di punti particolari per agevolare i conti ha indotto gli studenti a ricercare l'equazione di una retta particolare



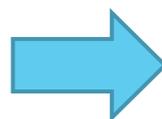
Solo un'attenta analisi dell'equazione ha insinuato negli studenti il dubbio che aspettativa e risultato non coincidessero





in moto... RETTILINEO

OBIETTIVO PRINCIPALE:
equazioni parametriche
di una retta



$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \end{cases}$$

... ma molti altri spunti

Fascio proprio di rette $y - y_0 = \frac{v_y}{v_x} \cdot (x - x_0)$

Descrivere la direzione del moto
attraverso un angolo: $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$

Condizioni sul parametro t

Principio di sovrapposizione dei moti

Principio di inerzia

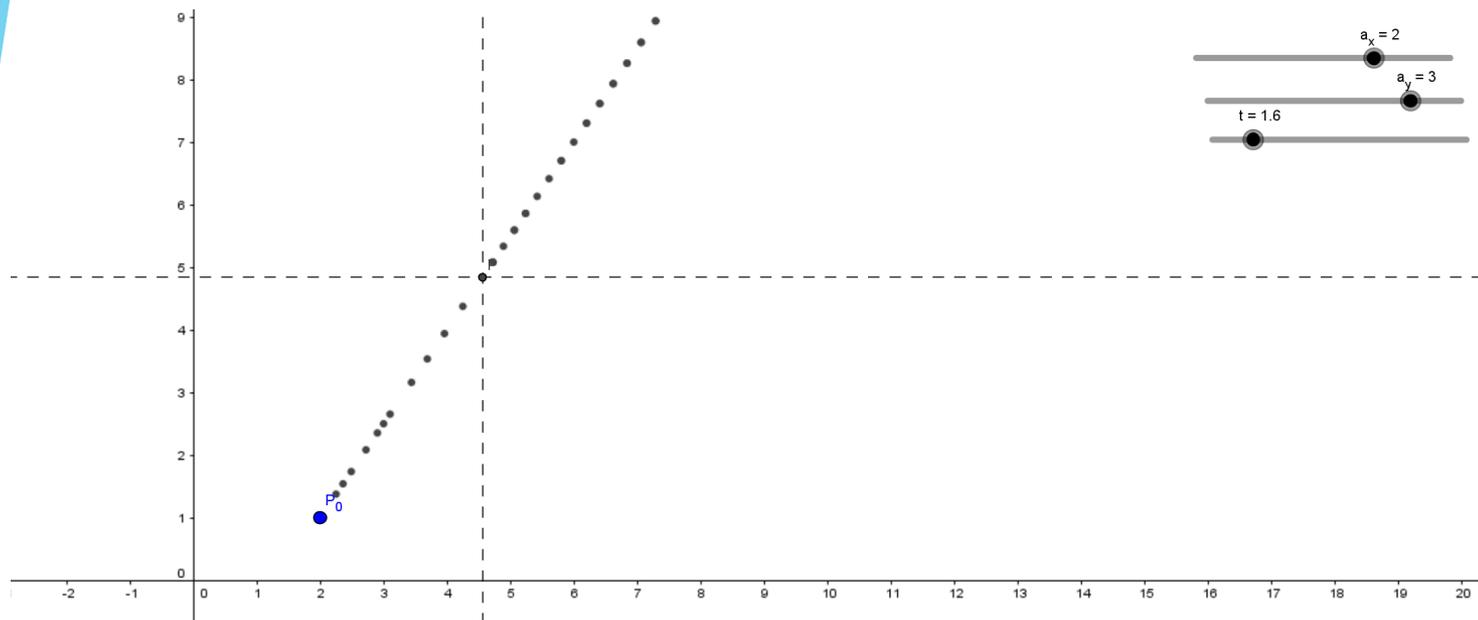
Traiettoria VS diagramma orario





Approfondimenti

Cosa succede se si sovrappongono due moti rettilinei uniformi con la stessa accelerazione? E con due accelerazioni diverse?





DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



GRAZIE PER L'ATTENZIONE !



Piano Lauree Scientifiche
In collaborazione con MIUR, con Scienze, Confindustria



DIFIMA 2019 - 11 ottobre 2019