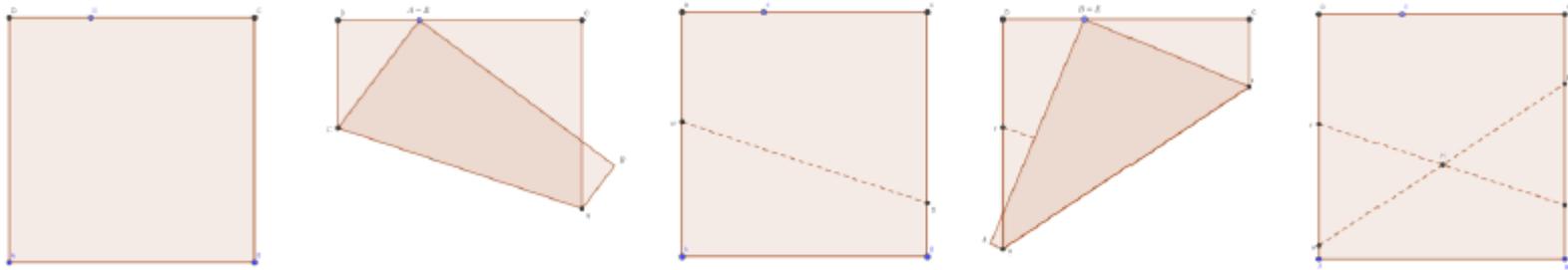


# GeoGebra-Origamics

Esplorare, congetturare e dimostrare a partire da due semplici pieghe



**"More wonders emerge!"**

Torino, 11 ottobre 2019

GEOGEBRA DAY

# Una premessa

- L'insegnamento della geometria caposaldo dell'educazione matematica, ieri come oggi (I.N.)

*“Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio: “*

*“ gli elementi della geometria del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni)”*

- L'insegnamento/apprendimento della geometria ruota attorno l'esplorazione con (pre-visualizzazione), visualizzazione, analisi, deduzione informale, deduzione formale, rigore (Van Hiele, 1986)
- Nell'insegnamento e nei libri di testo della scuola secondaria di secondo grado, lo studio della geometria è presentato a livello formale (livello 4 del framework di Van Hiele)
- Le difficoltà degli studenti

# Una premessa

Dalle stesse Indicazioni Nazionali e da quelle di UMI-CIIM

- **Obiettivi specifici di apprendimento**

- *“In coerenza con il modo in cui si è presentato storicamente, **l’approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica**”.*

- **Indicazioni UMI-CIIM**

- *Un **ruolo centrale** in tutti gli ambiti della Scuola secondaria di II grado, in particolare in Geometria, deve essere assegnato **all’argomentazione e alla congettura per arrivare gradualmente al significato di dimostrazione** e, con molta prudenza, di una teoria in matematica.*
- *Per dare significato ai concetti teorici in Geometria e per stimolare la formulazione di congetture e l’attività di costruzione di modelli matematici è molto utile far **sperimentare** agli alunni l’uso di strumenti e modelli concreti (costruzioni con riga, squadre, compasso; costruzioni ottenute tramite **piegatura della carta**, strumenti per tracciare le coniche, macchine matematiche; modelli di solidi costruiti con cartoncino, cannucce, materiali in commercio per la costruzione di poliedri, ...).*

# Una premessa

- Ampia letteratura sull'insegnamento e apprendimento della geometria
  - I DGS come GeoGebra possono favorire l'apprendimento della geometria
  - L'utilizzo del Paper Folding è molto pubblicizzato, ma gli studi sulla sua efficacia didattica sono ancora limitati
  - Prospettive sull'uso combinato del duo di artefatti

# Paper Folding e GeoGebra

Per favorire l'attivazione dei processi cognitivi coinvolti in un'attività geometrica:  
**visualizzazione, costruzione con strumenti e ragionamento** (Duval, 1998)

- **Paper Folding**

- Crea contesti emozionali positivi e collaborativi
- Sviluppa le capacità motorie e la concentrazione mentale
- Lavorano entrambi le mani, Coordinamento occhio-mani
- Rinforza la memoria, capacità di visualizzazione

- **GeoGebra**

- Tantissimi PRO
- Attenzione alla SCHERMO-METRIA (V. Villani)

- **Sinergia di artefatti**

- differenti schemi d'uso
- GeoGebra per vedere oltre la carta
- Ragionamenti anche con i materiali per favorire la creatività e la visualizzazione

# La nostra esperienza: un inizio

- **Scuole di indirizzo non scientifico**
  - Studenti deboli in matematica e poco motivati  
e/o
  - Esiguo numero di ore di matematica
- **Un gruppo di docenti**
  - “When good teaching leads to bad results” (A. Schoenfeld)
  - Che non vogliono rinunciare all’insegnamento della geometria euclidea

# Il nostro scopo

- **Promuovere il pensiero geometrico attraverso la scoperta guidata con Paper Folding e GeoGebra, investendo sulle GHoM**

## Geometric Habits of Mind

- Ragionare con le relazioni
- Generalizzare idee geometriche
- Investigare invarianti
- Equilibrare esplorazione e riflessione  
(Driscoll 2007)

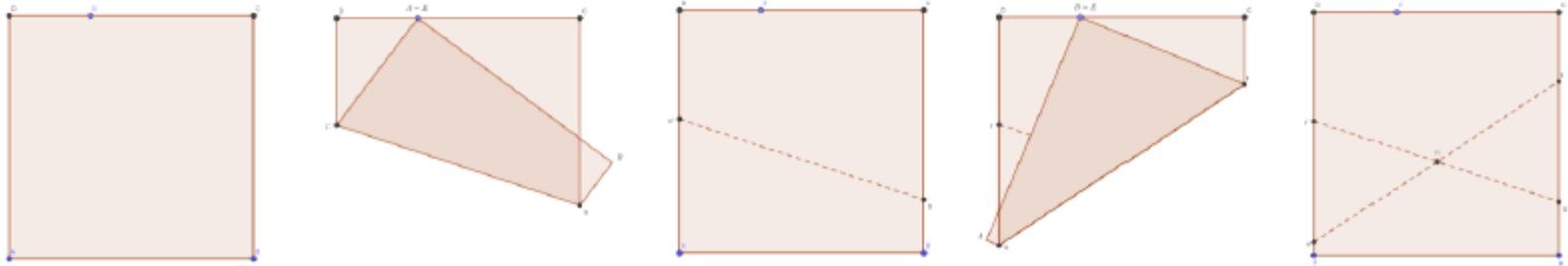
# La nostra esperienza in una classe terza di liceo classico

- Una formazione “informale” tra docenti
  - mesi di lavoro
    - Su GeoGebra
    - Sul Paper Folding
    - Sui laboratori di matematica
- Un mini corso per gli studenti
  - GeoGebra in classe
  - Le prime pieghe (assiomi I,..., IV Huzita-Hatori) e contestualizzazione nella teoria di Euclide
- Scelta e studio dell’attività da portare in classe per un recupero
  - X-Lines with lots of Surprises (K. Haga)
- Scelta dell’ambiente di lavoro e degli artefatti
  - GeoGebra groups , carta (wax paper) e GeoGebra

# Un problema ricco

- Accessibile a tutti gli studenti (almeno in parte)
- Con riferimento alla realtà fisica (foglio di carta da piegare)
- Può essere approcciato in più modi
- Favorisce la collaborazione e discussione
- Coinvolge, stupisce, favorisce la creatività
- Permette connessioni tra argomenti e ambiti disciplinari
- Dà l'opportunità di cercare generalizzazioni

# X-Lines with lots of Surprises



**"More wonders emerge!"**

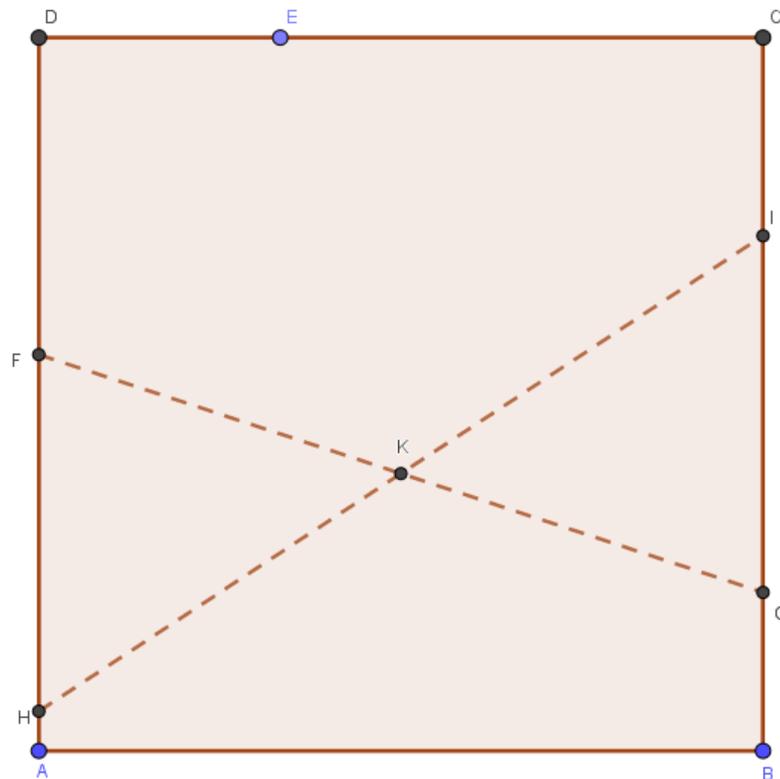
tratto da

**Origamics, Mathematical Explorations Through Paper Folding  
(Kazuo Haga, 2008)**

- Origamics non è Origami
- Origamics per studiare gli effetti delle piegature

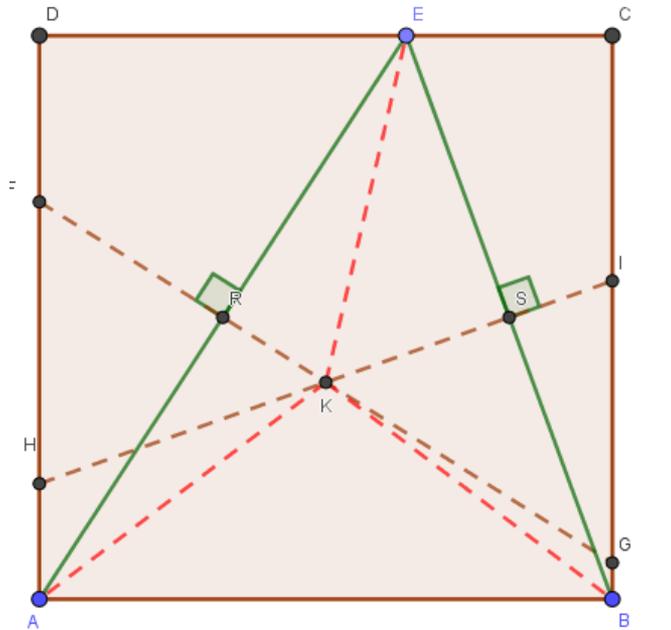
# Tante osservazioni ... e generalizzazioni

1. Il punto di intersezione delle pieghe appartiene all'asse di AB.
2. Il luogo descritto dal punto di intersezione delle pieghe è un segmento (di lunghezza  $1/8$  supposta uguale a 1 la lunghezza del lato del foglio)
3. Il punto di intersezione delle pieghe è equidistante dal punto E scelto sul lato CD e dai vertici A e B (la procedura per determinare il circocentro!)
4. I triangoli FHK e GIK sono congruenti
5. Le lunghezze dei segmenti FH e GI sono invarianti e uguali a metà del lato del quadrato
6. Cosa succede se il foglio è rettangolare?



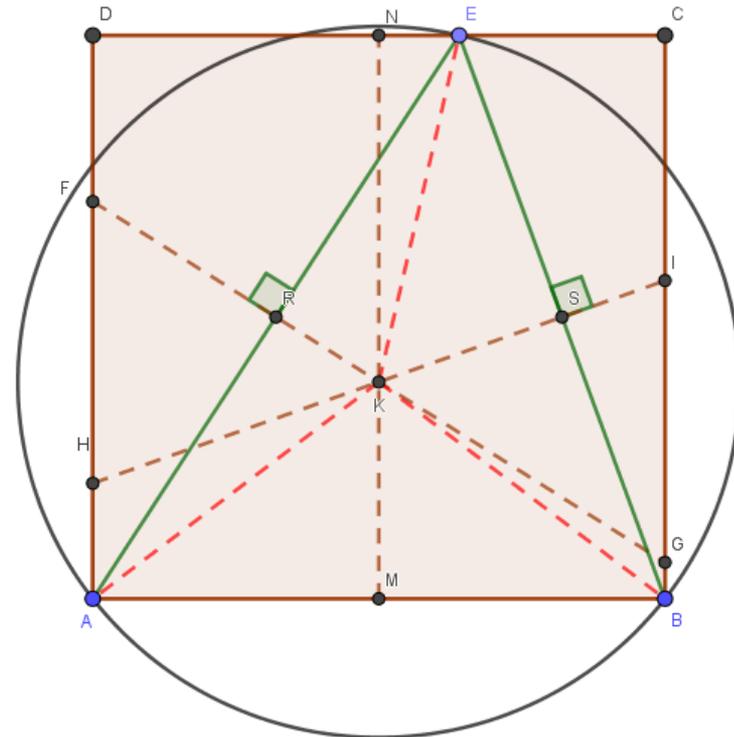
# 1. e 3.

- Il punto di intersezione delle pieghe è equidistante dal punto E scelto sul lato DC e dai vertici A e B



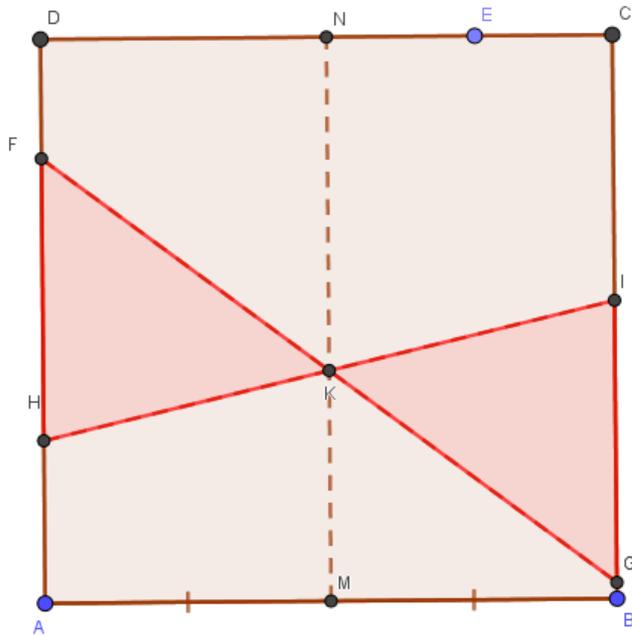
Congruenza di triangoli rettangoli  
e/o  
Asse di un segmento come luogo

- Il punto di intersezione delle pieghe appartiene anche all'asse di AB.



Il circocentro!

# 4.



I triangoli FHK e GIK sono congruenti

Il modo più semplice

Teorema di Talete (piccolo)  
1° criterio di congruenza dei triangoli

Con la carta?

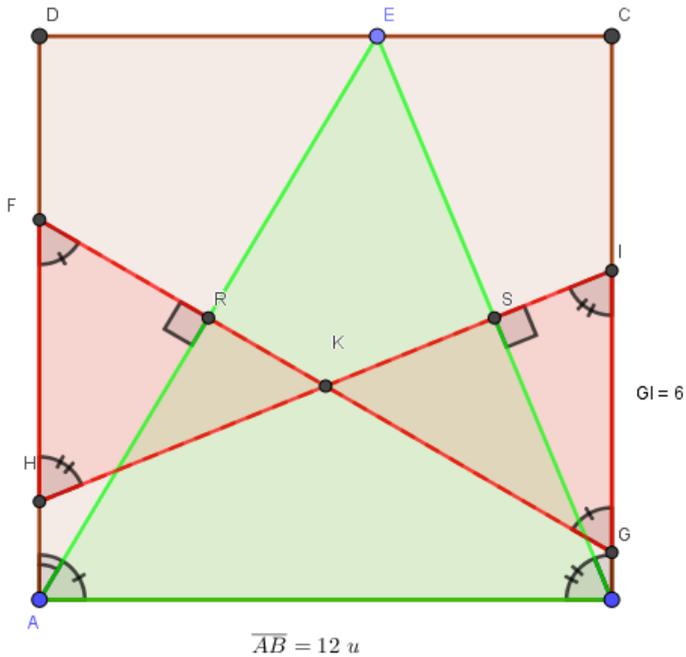
Un piccolo problem solving!

# 5.

- Le lunghezze dei segmenti FH e GI sono invarianti e uguali a metà del lato del quadrato

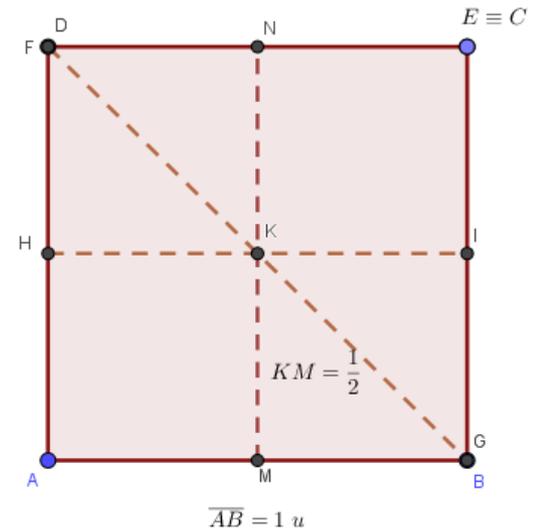
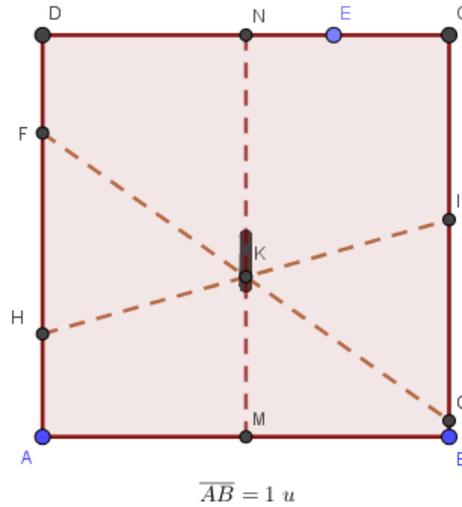
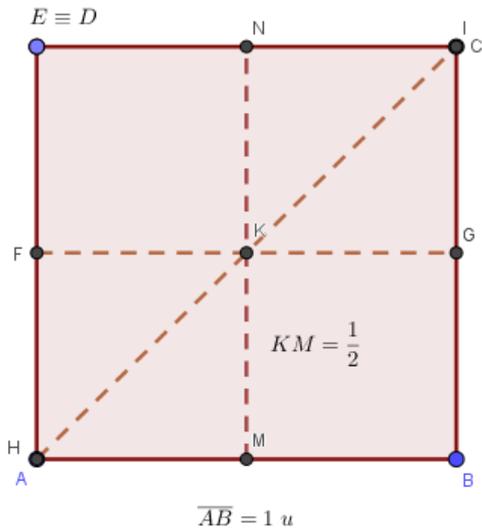
ABE e GIK Triangoli simili  
Rapporto 2:1

Con la carta?  
Sovrapporre i fogli e verificare l'invarianza  
Esaminare un caso limite



# 2.

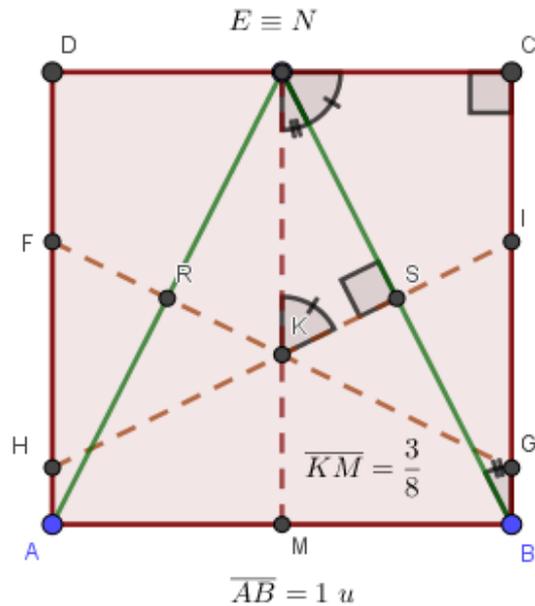
- Il luogo descritto dal punto di intersezione delle pieghe è un segmento (di lunghezza  $1/8$  supposta uguale a 1 la lunghezza del lato del foglio)



# 2.

Come fa Haga utilizzando il suo I Teorema  
(vedi intervento Stefania Serre 2015)

oppure



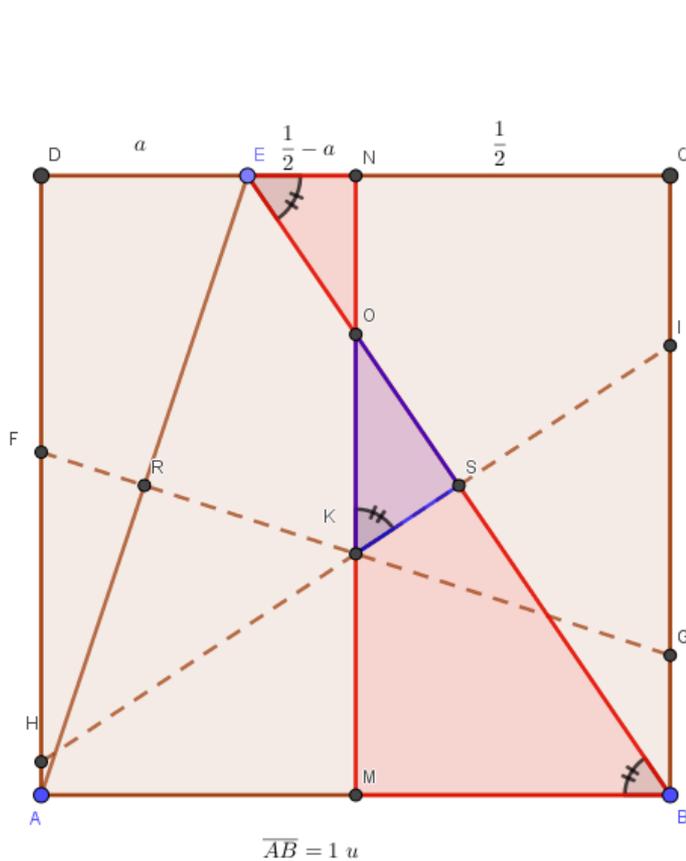
$$EKS \sim EBC \Rightarrow EK : EB = \frac{EB}{2} : BC$$

$$\overline{EB} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (Pitagora)}$$

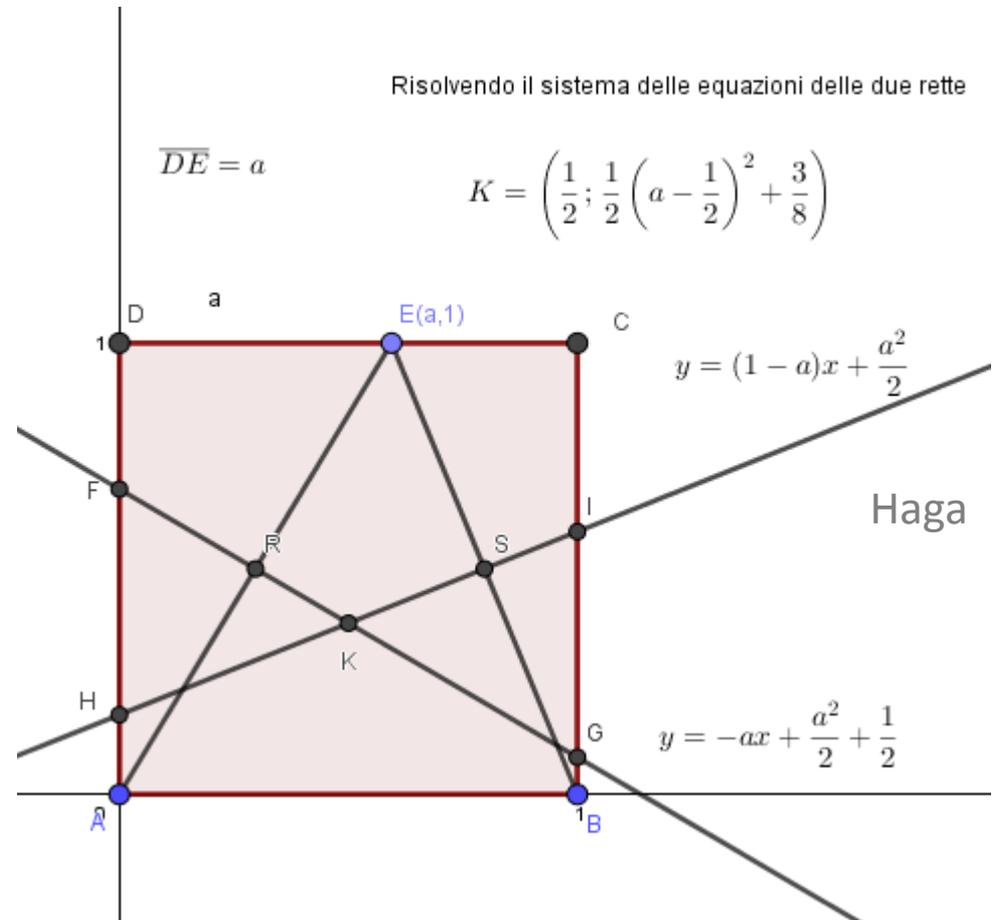
$$\text{Si ricava } \overline{EK} = \frac{5}{8} \text{ e poi } \overline{KM} = \frac{3}{8}$$

# 2.

- Connettendo con algebra o relazioni e funzioni



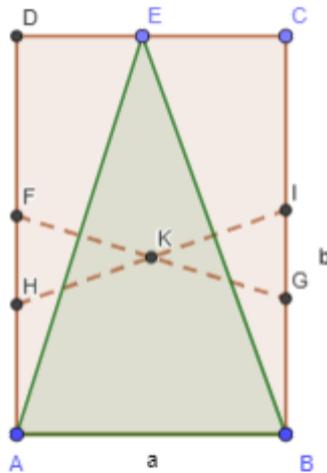
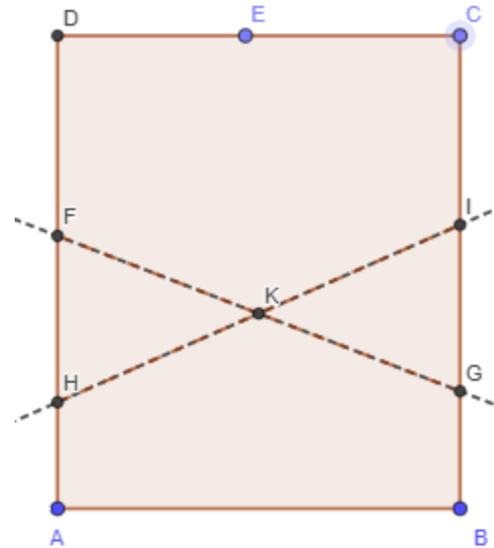
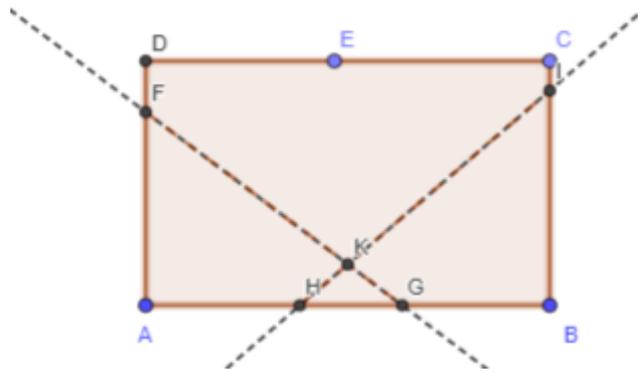
$$\overline{AB} = 1 \text{ u}$$



Haga

# 6.

Cosa succede se il foglio è rettangolare?  
Con la carta, come disporlo?



1. Vale
2. La lunghezza del segmento diviene  $\frac{a^2}{8b}$
3. Vale
4. Vale
5.  $\overline{FH} = \overline{IG} = \frac{a^2}{2b}$

**Il foglio quadrato come caso particolare!**

# Nodi concettuali

- Asse di un segmento
- Simmetria assiale
- Congruenza dei triangoli
- Circoentro di un triangolo
- Somma degli angoli interni di un triangolo
- Teorema di Talete
- Similitudine dei triangoli

# Fasi dell'attività

1. Il docente mostra le pieghe agli studenti
2. Gli studenti riproducono individualmente le pieghe, più volte con fogli diversi scegliendo punti diversi del lato superiore
3. Seguono cinque cicli task-discussione: gli studenti, a coppie, lavorano ai compiti su GeoGebra groups, compilano le schede individuali, al termine di ciascun compito si discute collettivamente
4. L'insegnante può osservare e commentare il lavoro degli studenti

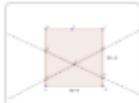
# Esplorare, congetturare, dimostrare in ambiente GeoGebra Groups

- Guided discovery
- Fogli di lavoro dinamici con domande, piccoli suggerimenti orientativi per favorire le GHoM e l'attività discorsiva e “spingere” verso la dimostrazione.
- Fogli di lavoro preparati secondo l'analisi a priori dei docenti , ma riadattati in itinere

<https://www.geogebra.org/m/nhtcrg5c>

# Valutazione ... formativa

nti     Risorse     Valutazione

"X-Lines wit...	"X-Lines wit...	"X-Lines wit...	"X-Lines wit...	"X-Lines wit...	esercitazion...	questionari...
						
1.4) ... per gen...	1.3) ... per arriv...	1.2) ... per arriv...	1.1) ... per arriv...	1) Partiamo da...	es 64 del libro...	questionario e...
		 IN RITARDO			 	 
		 IN 			 	
		 IN 			 	
		 IN 			 	
		 			 	
		 IN RITARDO		 IN RITARDO	 IN 	
		 IN 			 	 
		 IN 			 	
		 IN 			 	
		 IN RITARDO	 		 	

# Qualche conclusione ... aggiustamento

- Gli studenti: *“Interessante, ma faticoso!”*
  - *labōrare*
  - coinvolgimento attivo e produttivo degli studenti
- Molte osservazioni empiriche, ma ancora poche spiegazioni e mancanza del senso della dimostrazione
- Riduzione del lavoro preventivato
- Ruolo dell’insegnante ...
- In futuro
  - dare la possibilità di ritornare sul compito a casa
  - Interventi sistematici

# Per finire ... la nostra idea

- Implementare un curricolo di geometria con l'integrazione di Paper Folding e GeoGebra per il biennio di scuola secondaria (3 istituti partecipanti)
- Utilizzare il framework GHoM come lente interpretativa
- Realizzare un book condiviso di attività ed esercizi fruibili in ambiente GeoGebra Groups

**GRAZIE!**

# Bibliografia e Sitografia

- Cuoco, A., Goldenberg, E.P., Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR 15, 375-402
- Driscoll, M.J. (2007) . Fostering Geometric Thinking: A Guide for Teachers, Grades 5-10. Heinemann
- Duval, R. (1998), Geometry from a Cognitive Point of View. In C Mammana and V Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.
- Haga, K (2008). ORIGAMICS: Mathematical Explorations through Paper Folding. World Scientific Publishing Co. Pvt. Ltd
- Hohenwarter, M. (2016). GeoGebra Groups - Zusammenarbeit für SchülerInnen und LehrerInnen. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg. Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Munster: WTM-Verlag.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In: Gutiérrez, A. & Boero, P. (eds). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers. 173-204.
- Serre, S. (2015) . Geometria, GeoGebra e Origami, una grande sinergia in poche pieghe. GeoGebra day. Torino
- Tomaschko, M. Arkün, S. Hohenwarter, M (2018). Opportunities for Participation, Productivity, and Personalization Through GeoGebra Mathematics Apps, Handbook of Research on Mobile Devices and Smart Gadgets in K-12 Education.
- Van Hiele P.M. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*
- <https://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/>
- <https://miur.gov.it/web/guest/scuola-secondaria-di-secondo-grado>