

EINSTEIN E IL GPS

UN OGGETTO COMUNE TRA FISICA E MATEMATICA



Vera Montalbano



PIANO NAZIONALE
LAUREE SCIENTIFICHE





Scuola nazionale estiva
per insegnanti



Recondite armonie: il tempo nelle scienze

Siena, 11-15 luglio 2016

Scuola estiva di Fisica – Vivo d'Orcia 5 – 8 settembre 2016
Un attimo o un'eternità: stime e misure di tempi

Scuola estiva di Fisica – Vivo d'Orcia 2 – 5 settembre 2019
Alla conquista dello spazio

World Space Week OCTOBER 4-10, 2018
www.worldspaceweek.org

الأسبوع العالمي للفضاء
10 أكتوبر - 4

Semana mundial del espacio
4-10 de Octubre

世界空间周
10月4日 - 10日

Всемирная неделя космоса
4-10 октября

Semaine mondiale de l'espace
Octobre 4-10

SETTIMANA MONDIALE DELLO SPAZIO A SIENA
UNIVERSITÀ DI SIENA, SEZIONE DI FISICA, VIVO D'ORCIA 50 - SIENA

4 OTTOBRE ORE 11
SCIENZA E FANTASCIENZA: IN VIAGGIO VERSO NUOVI MONDI
SIMONA MICALÈ - VERA MONTALBANO

7 OTTOBRE ORE 16
ALLA RICERCA DELLA MATERIA OSCURA
EMILIO MARIOTTI

8 OTTOBRE ORE 18
QUANDO UN'ECLISSI CAMBIA LA STORIA
GIACOMO BONNOLI
A seguire apertura straordinaria dell'Osservatorio Astronomico con osservazione della Luna a cura di Alessandro Marchini

9 OTTOBRE ORE 18:30
ESPLORANDO IL SISTEMA SOLARE
GIANFRANCO GARGANI

10 OTTOBRE ORE 18:30
ONDE GRAVITAZIONALI E DINTORNI
GIOVANNI BIANCHI

11 OTTOBRE ORE 19:30
EINSTEIN E IL GPS
VERA MONTALBANO

World Space Week OCTOBER 4-10

Sezione di Fisica
Università di Siena

EINSTEIN E IL GPS

PROPRIETÀ SPAZIO-TEMPORALI INCONSUETE MA UTILISSIME

IX CONVEGNO NAZIONALE DI DIDATTICA DELLA FISICA E DELLA MATEMATICA

DI.FI.MA. 2019

9 OTTOBRE

FISICA NELLA CULTURA E NELLA SOCIETÀ

9-10-11 ottobre 2019

Vera Montalbano



PIANO NAZIONALE LAUREE SCIENTIFICHE

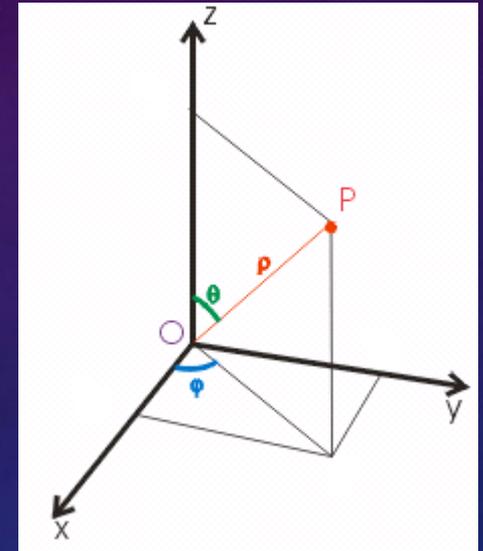
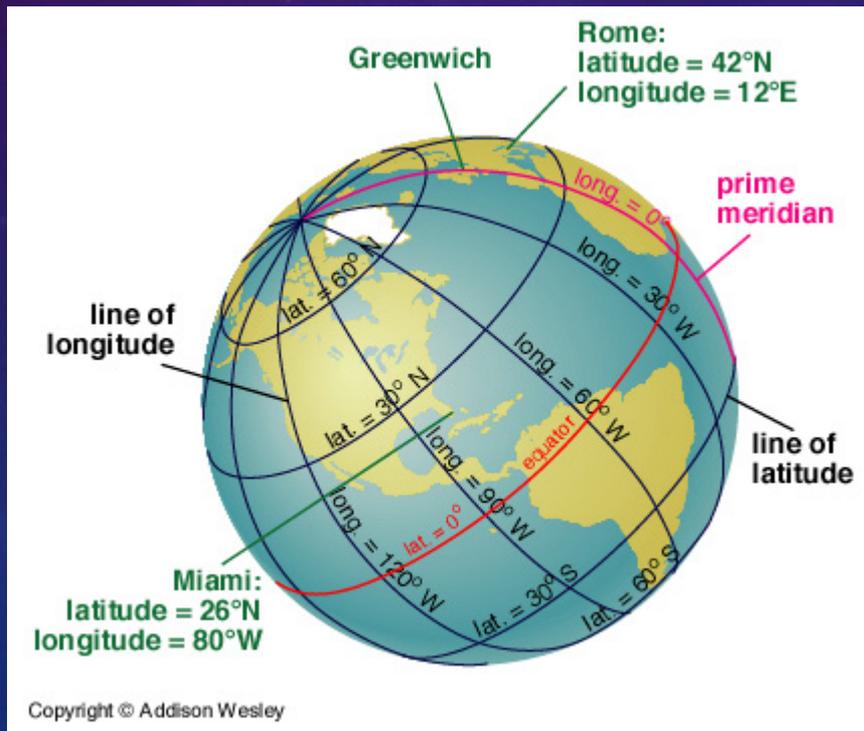


PERCORSI INTERDISCIPLINARI

- Aumenta l'interesse degli studenti
- Si spiega il funzionamento di un oggetto utilizzato nella vita quotidiana
 - Utilità e interconnessioni tra fisica, matematica e tecnologia
- Da una matematica relativamente semplice si può arrivare a far intuire proprietà geometriche non banali in spazi non euclidei
- Collegandole ad aspetti fisici misurabili e significativi
- Migliora la conoscenza del mondo tecnologico degli studenti e mostra la profonda relazione tra scienza (anche pura) e tecnologia
- Si contrasta almeno in un caso l'atteggiamento magico nei confronti della tecnologia
 - Le cose funzionano perchè...sì, ma è impossibile per noi comuni mortali capire perchè
- Un ottimo esempio di sinergia tra matematica, fisica teorica e fisica sperimentale

SISTEMA DI RIFERIMENTO

- FINO AL 1990 Triangolazione
- DAL 1994 Sistema di Posizionamento Globale

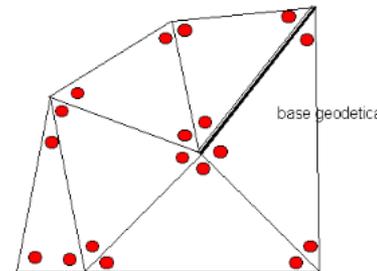
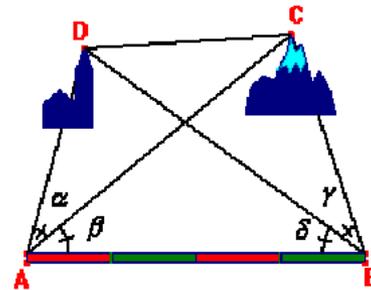


TRIANGOLAZIONE GEODETICA

rilevazione esatta della posizione di una serie di punti sulla superficie terrestre a partire da alcuni punti noti effettuando misure di angoli e di distanze ed eseguendo calcoli basati sulle regole della trigonometria (**triangolazione**).

Per **triangolazione** si intende la procedura geometrica che consiste nella determinazione della posizione di punti prescelti attraverso la misurazione degli angoli formati dalle linee che collegano ciascun punto a quelli circostanti e di alcuni dei lati della serie di triangoli che si viene così a costituire (**basi geodetiche**).

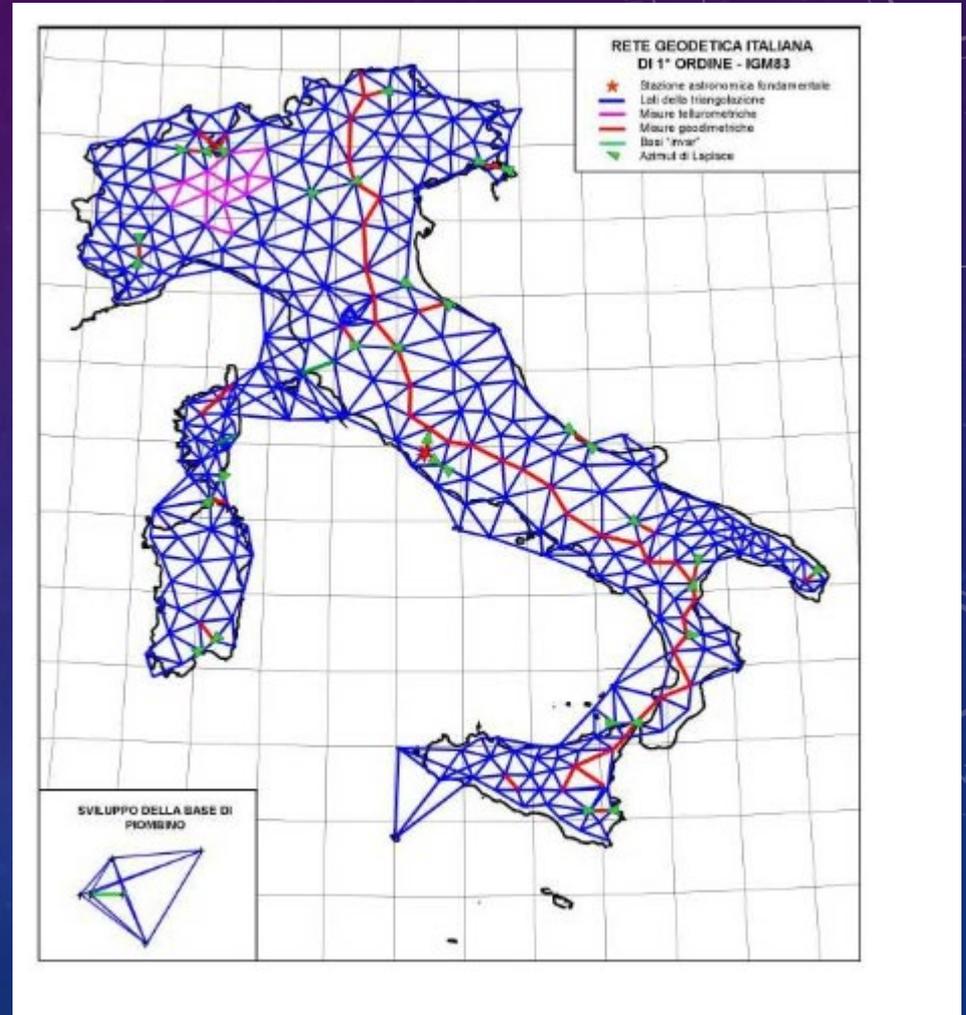
La determinazione della lunghezza delle basi deve essere estremamente precisa perché da esse, per via trigonometrica, vengono calcolate tutte le altre distanze.



● misura di angolo azimutale
— misura di distanza

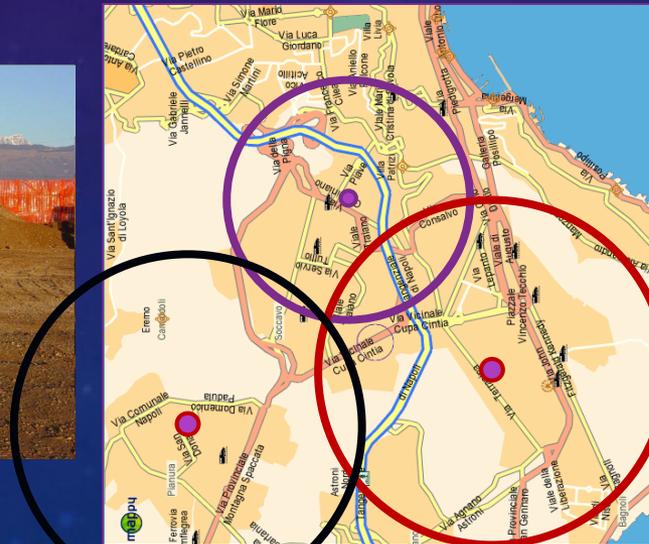
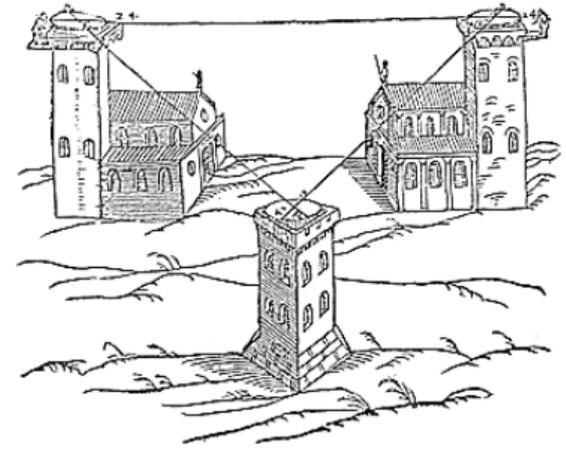
RETE GEODETICA

L'insieme dei punti geodetici, individuati attraverso il metodo della **triangolazione**, forma una rete di triangoli detta **rete geodetica**.



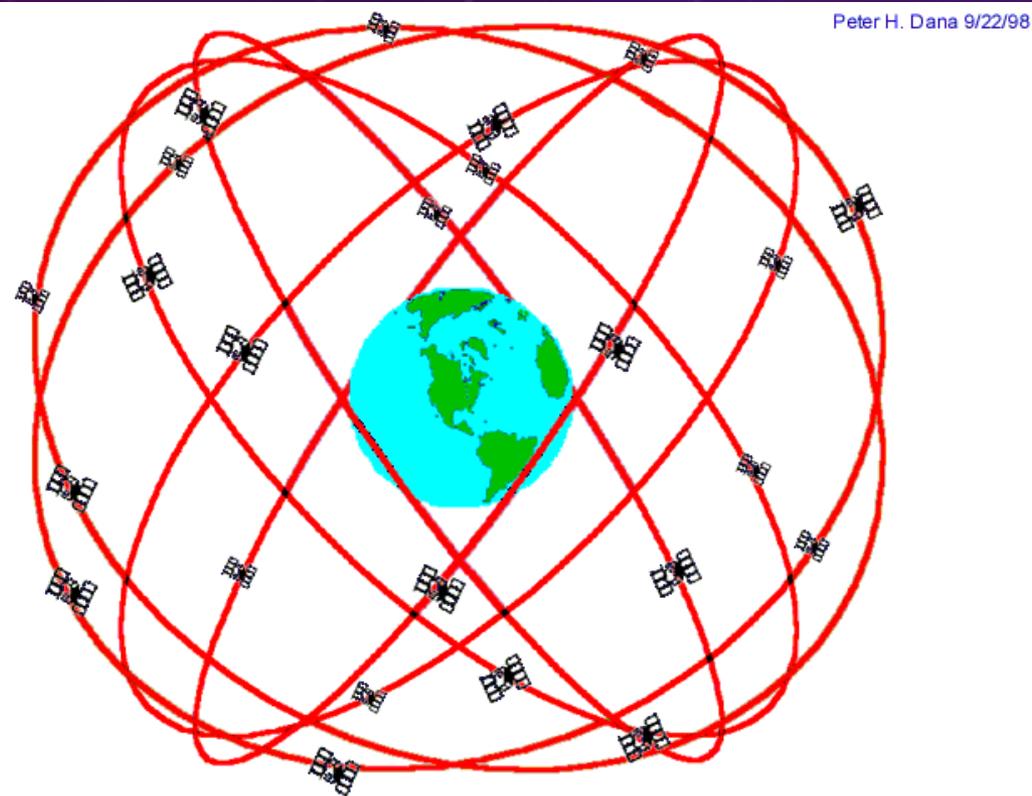
Triangolazione

a partire da almeno due punti di coordinate note (il primo è sempre un vertice trigonometrico, mentre il secondo può essere scelto nella rete geodetica o misurato), si misurano **angoli e distanze** allo scopo di calcolare per via trigonometrica la posizione del punto di cui interessano le coordinate.



La nostra posizione è individuata in base alle distanze da tre punti di riferimento

Misure dirette di coordinate



GPS Nominal Constellation
24 Satellites in 6 Orbital Planes
4 Satellites in each Plane
20,200 km Altitudes, 55 Degree Inclination

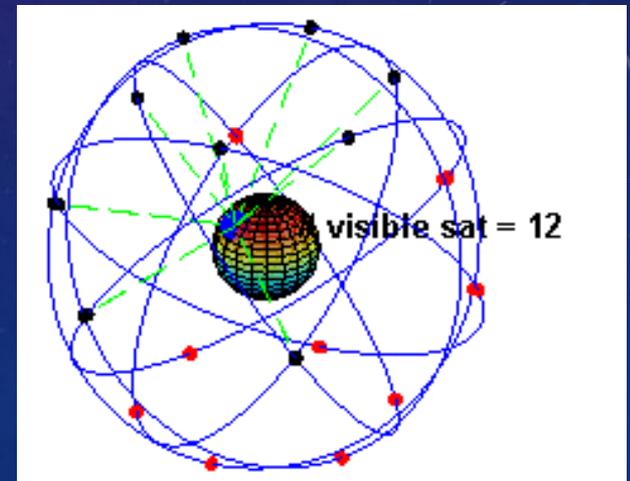
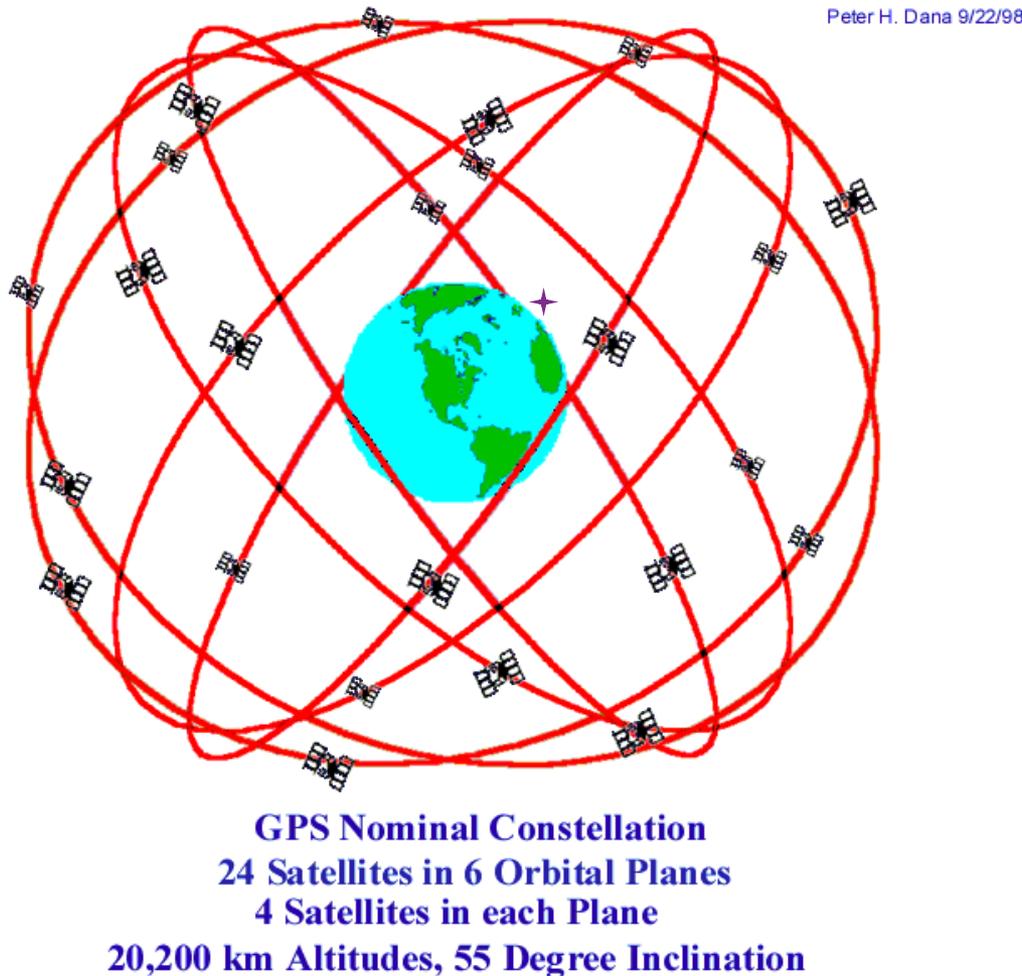
Il sistema **GPS**, acronimo di **Global Positioning System**, consente la localizzazione di entità sulla superficie terrestre, facendo riferimento alla posizione di satelliti in orbita intorno alla Terra.

Fu introdotto inizialmente soltanto per scopi militari dall'esercito americano, che tuttora lo gestisce, ma è oggi ampiamente utilizzato anche per scopi civili.

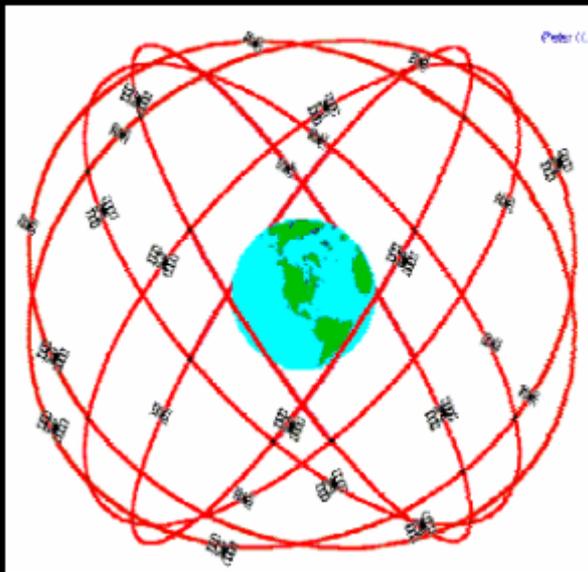
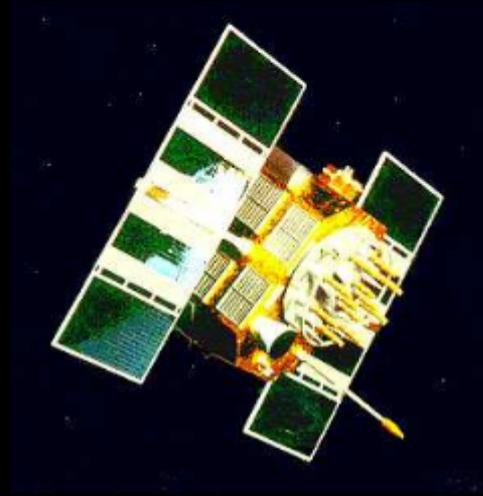
Misure dirette di coordinate

Il sistema **GPS**, acronimo di **Global Positioning System**, consente la localizzazione di entità sulla superficie terrestre, facendo riferimento alla posizione di satelliti in orbita intorno alla Terra.

Fu introdotto inizialmente soltanto per scopi militari dall'esercito americano, che tuttora lo gestisce, ma è oggi ampiamente utilizzato anche per scopi civili.



I satelliti del sistema GPS

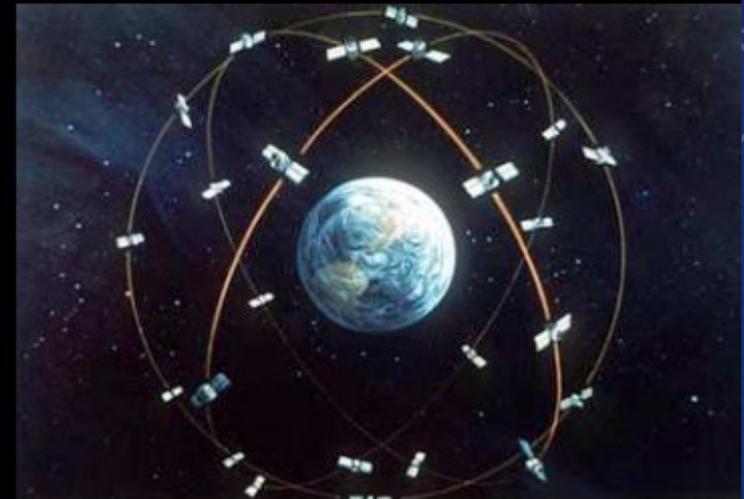


- Proprietà della Difesa USA
- 27 satelliti (24+3 riserve)
- Lanciati dal 1978 al 1994
- 20.000 km dalla Terra
- 12 ore periodo di rivoluzione
- 1.000 Kg di peso
- 17 metri (con pannelli)
- 10 miliardi di euro
(per il sistema completo)

Come si trova la nostra posizione sulla Terra con il GPS?

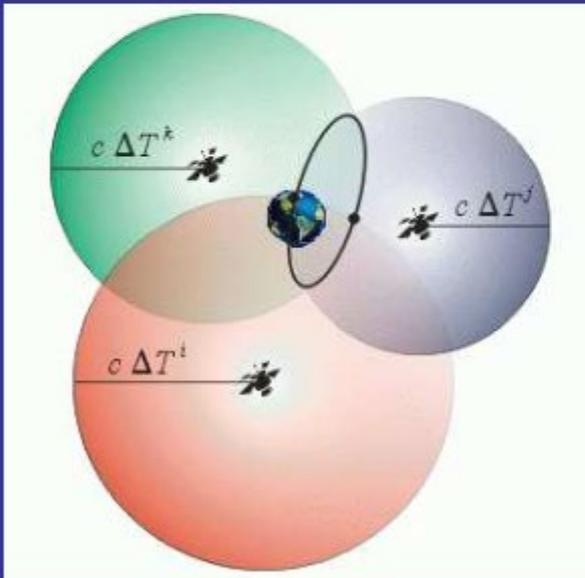
- Stessa idea di base della triangolazione: la posizione in base a distanze da punti noti
- Quali punti noti usare ?

I satelliti del sistema GPS



Nella triangolazione i punti di riferimento sono sulla superficie terrestre Ora sono nello spazio !

Dal piano allo spazio → da cerchi a sfere



1. Siamo ad una certa distanza dal primo satellite: su una sfera
2. Siamo sul cerchio dove si intersecano la sfera del primo e del secondo satellite
3. Siamo in uno dei due punti dove il cerchio si interseca con la sfera del terzo satellite
4. Non possiamo essere che nel punto sulla Terra !

La nostra posizione è individuata in base alle distanze da tre punti di riferimento

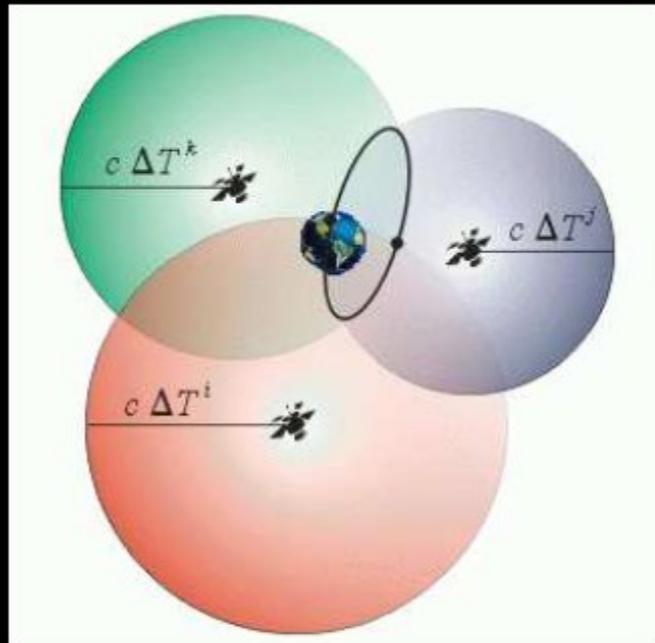
Come misura la distanza dai satelliti il Gps nel nostro cellulare?

Una precisione di 10 m su 20.000.000 m
è circa una parte su un milione

(diametro medio capello $50 \mu\text{m}$) / (Torre di Pisa 56 m)

**E' come misurare l'altezza della Torre di Pisa con
la precisione del diametro di un capello !**

Con speciali sistemi (differenziali) si riescono a raggiungere
precisioni ancora maggiori

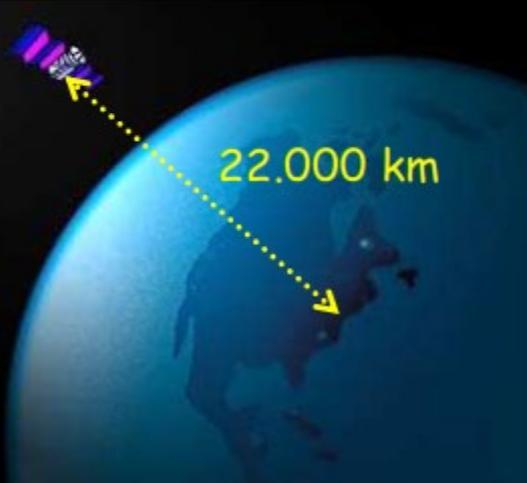


I segnali radio inviati dal satellite viaggiano con una velocità conosciuta con estrema precisione: la velocità della luce c !

$$c = 299\,792 \text{ km/s} \approx 300.000 \text{ km/s}$$

Per determinarne le distanza (= $c \times T$)
bisogna misurare il tempo T di
percorrenza del segnale

Quanto piccoli sono i tempi misurati da GPS ?



Velocità della luce $c = 300.000 \text{ km/s}$
Distanza del satellite $D = 20.000 \text{ km}$

$$D = c \times T$$
$$\rightarrow T = D/c = 20.000 / 300.000 \text{ km/s}$$

Tempo da misurare: **6,7 centesimi di secondo !**
Con la precisione di circa 1 parte su 1 milione !

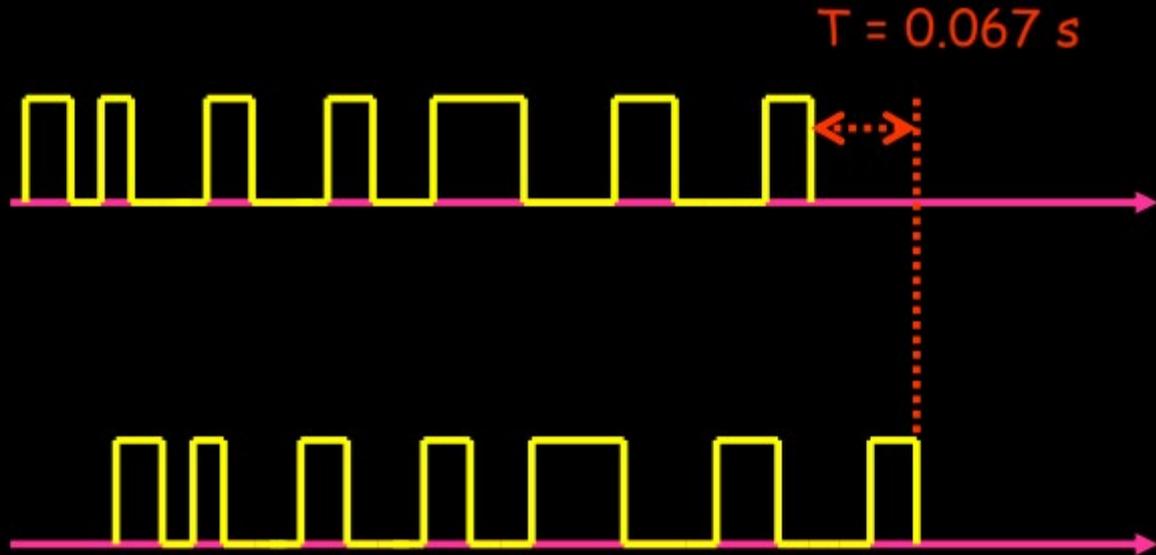
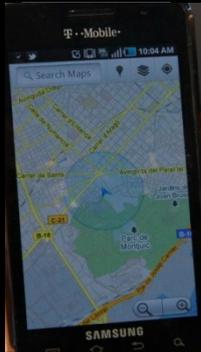
Questo fa un ricevitore portatile !
(su auto, aereo, barca, ... in trekking)

Come?



Satellite e ricevitore "cantano la stessa canzone"

(il segnale PRN : Pseudo Random Noise)

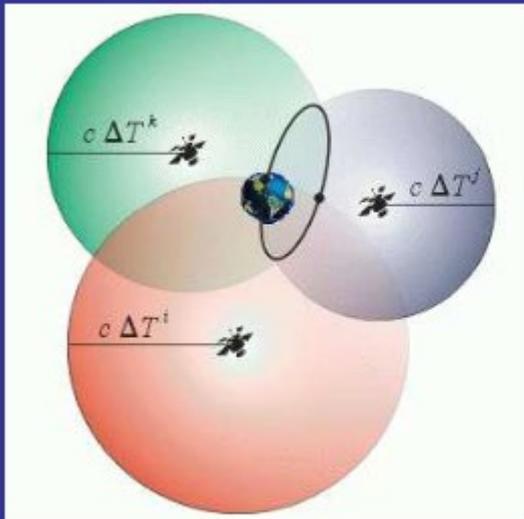
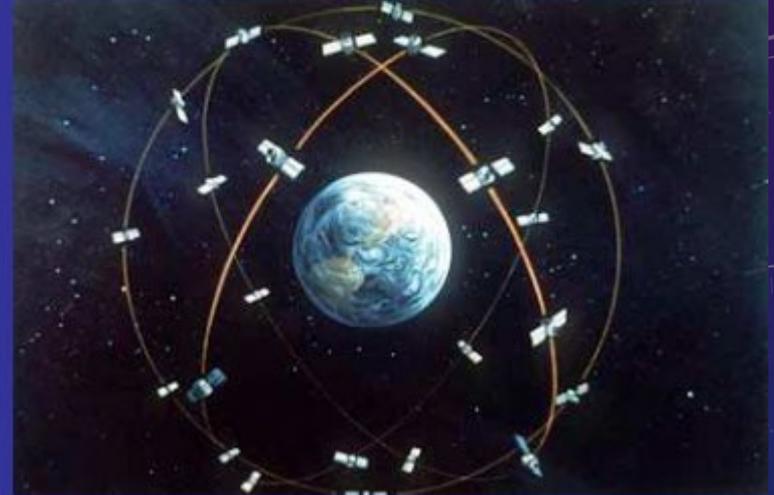


Misurando il ritardo T del "canto" del satellite, il ricevitore misura il tempo di percorrenza del segnale e quindi calcola la distanza D del satellite !

$$D = V \times T = 300.000 \text{ km/s} \times 0.067 \text{ s} = 20.000 \text{ km}$$

Da distanze a posizione

Il ricevitore "sa" dove si trovano i satelliti in ogni momento e quale sta "ascoltando": ognuno "canta una canzone diversa"!



Si può quindi calcolare la posizione, "ascoltando" almeno tre satelliti e misurando le distanze da essi

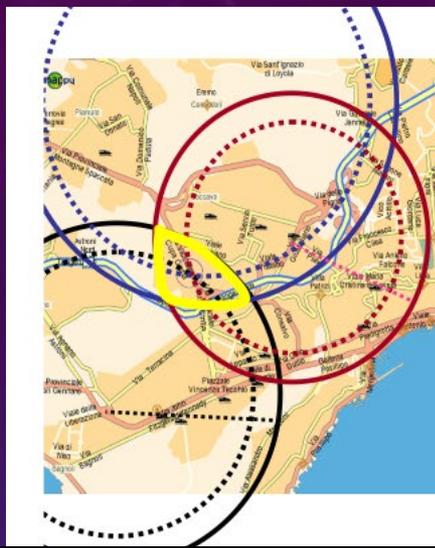
Con quale precisione ?

Quanto è precisa la misura del tempo T ?



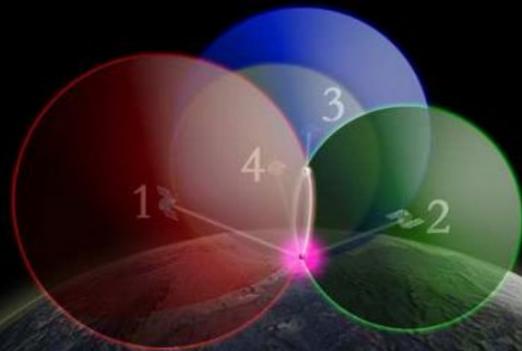
- I satelliti hanno orologi atomici, i più precisi esistenti. Ma un orologio atomico costa 100.000 euro
- I ricevitori hanno normali orologi al quarzo:
con un errore su T di 0.000001 s , incertezza D
 $300.000 \text{ km/s} \times 0.000001 \text{ s} = \underline{3 \text{ km}}$!

Come arrivare a precisioni di metri ?



- Sappiamo che i cerchi devono incontrarsi in un punto
- Supponiamo che il righello abbia lunghezza "sbagliata"
- Cambiamo il diametro di tutti i cerchi moltiplicandolo per una costante fino a trovare un punto solo
- Abbiamo migliorato la precisione !

Si usano **QUATTRO** satelliti:
se la posizione suggerita dal quarto "non torna" con quanto dato dai primi tre, si scalano tutte le distanze fino a trovare un solo punto!



Si scalano tutte le distanze perché gli errori su di esse sono tutti dati dall'errore (largamente dominante) sul tempo misurato dal ricevitore (come per il righello)

Relatività "Speciale" e "Generale"

Relatività "Speciale"

Il tempo non è una variabile assoluta; è "relativo" al sistema in cui siamo e dipende dal rapporto tra la sua velocità v e la velocità della luce c

Il tempo scorre più lentamente se il sistema si muove ad alta velocità

Effetto trascurabile per $v \ll c$, come nella vita corrente

Si parla di coordinate di spazio-tempo proprie del sistema in cui siamo

Relatività "Generale"

Una massa determina una "curvatura" dello spazio-tempo

Così la Relatività Generale spiega l'attrazione gravitazionale

Una massa M crea attorno a sé un avvallamento dello spazio-tempo entro cui un'altra massa m viene attratta, con una forza storicamente data dalla legge di Newton $F = G Mm/r^2$

Che cos'è la relatività

Descrizione in fisica moderna della Fisica nello Spazio-Tempo

Cosa sono lo spazio e il tempo?

Per un fisico queste grandezze si definiscono attraverso la definizione di un procedimento di misura.

Misure di spazio (lunghezze)

Nascono dall'esigenza di orientarsi sulla terra e sono all'origine della geometria (misura della terra)

Misure di tempo

Nascono dalla presenza di fenomeni periodici che influenzano la natura (giorno-notte, stagioni, fasi lunari)

Non c'è misura di spazio senza tempo e viceversa

Per misurare uno spazio devo percorrerlo, per misurare un tempo necessito di un fenomeno periodico ovvero di un moto che avviene nello spazio

Fondamenti della Relatività

I sistemi di riferimento sono essenziali per descrivere quantitativamente i fenomeni fisici.

→ Esistono dei riferimenti particolarmente adatti a descrivere i fenomeni fisici che si possono studiare nei laboratori terrestri: Riferimenti Inerziali.

Nel passaggio da un riferimento ad un altro assumono una particolare importanza per descrivere i fenomeni fisici gli invarianti:

→ Grandezze fisiche che hanno lo stesso valore quantitativo se misurate in riferimenti diversi.

Fondamenti della Relatività

Principio di Relatività (Galileo)

Nessun esperimento consente di distinguere due riferimenti il cui moto relativo è rettilineo uniforme

 **Tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi in due riferimenti il cui moto relativo è rettilineo uniforme**

 **Nel passaggio da un riferimento ad un altro che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, tutte le leggi fisiche sono invarianti**

Prima di definire questo principio, Galileo aveva introdotto e descritto il principio di inerzia. I riferimenti di cui si parla sono riferimenti inerziali.

Newton formalizzerà questi principi nella sua meccanica.

Fondamenti della Relatività

Principio di Relatività (Einstein) → Relatività Ristretta

Nessun esperimento consente di distinguere due riferimenti inerziali il cui moto relativo è rettilineo uniforme

→ **Tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi in due riferimenti il cui moto relativo è rettilineo uniforme**

→ **Nel passaggio da un riferimento ad un altro che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, tutte le leggi fisiche sono invarianti**

Einstein e Galileo formulano lo stesso principio, considerando tutta la fisica nota del loro tempo: è l'elettromagnetismo che fa la differenza negli esperimenti per misurare gli invarianti.

Fondamenti della Relatività

Principio di Relatività (Einstein) → Relatività Ristretta

Nessun esperimento consente di distinguere due riferimenti inerziali il cui moto relativo è rettilineo uniforme

→ **Tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi in due riferimenti il cui moto relativo è rettilineo uniforme**

→ **Nel passaggio da un riferimento ad un altro che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto al primo, tutte le leggi fisiche sono invarianti**

Einstein e Galileo formulano lo stesso principio, considerando tutta la fisica nota del loro tempo: è l'elettromagnetismo che fa la differenza negli esperimenti per misurare gli invarianti.

Fisica newtoniana e fisica relativistica

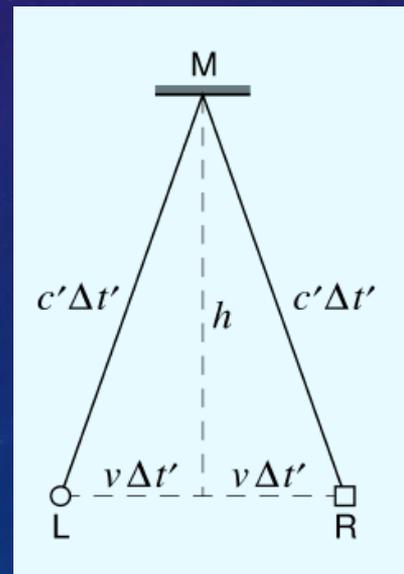
Da un punto di vista assiomatico, *si contrappongono due scelte*:

- fisica newtoniana: è invariante il *tempo* (si usa dire “assoluto”, ma è la stessa cosa)
- fisica relativistica: è invariante la *velocità della luce* nel vuoto.

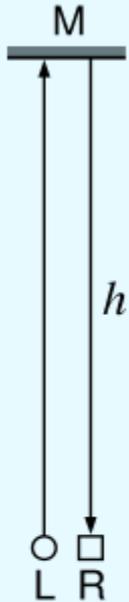
$$(c'^2 - v^2) (\Delta t')^2 = c^2 \Delta t^2$$

se $\Delta t' = \Delta t$, allora $c' > c$

se $c' = c$, allora $\Delta t' > \Delta t$.



Orologi a luce e invarianti



A sinistra: rif. T del treno ($h = c \Delta t$).

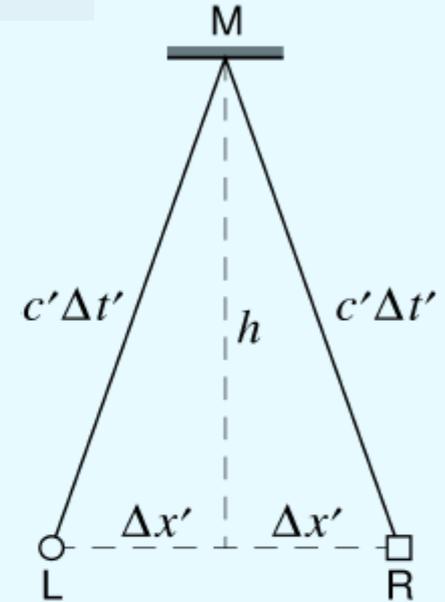
A destra: rif. S della stazione.

$$c'^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2 \Delta t^2$$

$$\Delta t^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 / c^2.$$

In un altro rif. R, che si muova con diversa velocità rispetto a T, avremo un diverso $\Delta x''$ e un diverso $\Delta t''$, ma ancora

$$\Delta t^2 = (\Delta t'')^2 - (\Delta x'')^2 / c^2.$$



Dunque l'espressione a secondo membro è *invariante*, e coincide col tempo misurato in un rif. “di quiete”, in cui emissione e ricezione avvengono nello stesso punto dello spazio (*tempo proprio*).

$$(c' \Delta t')^2 = (v \Delta t')^2 + h^2$$

$$(c'^2 - v^2) (\Delta t')^2 = c^2 \Delta t^2.$$

La dilatazione del tempo

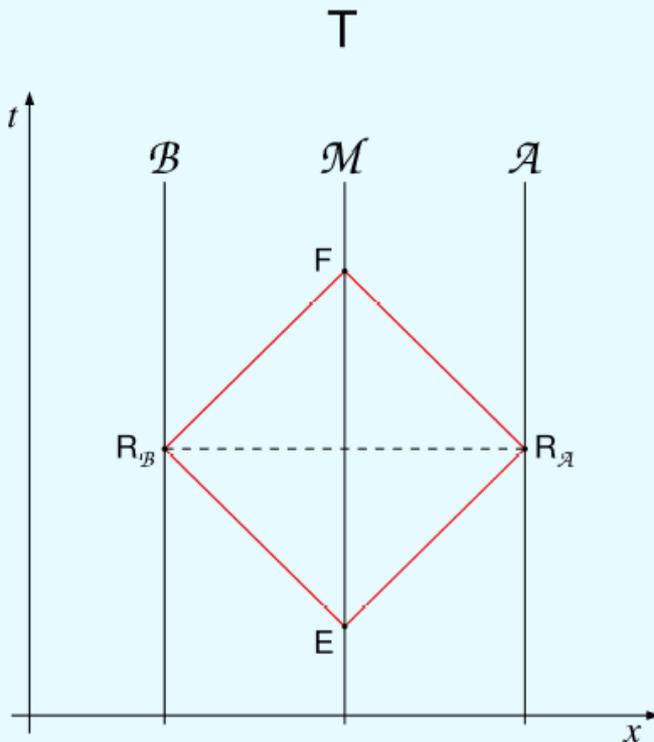
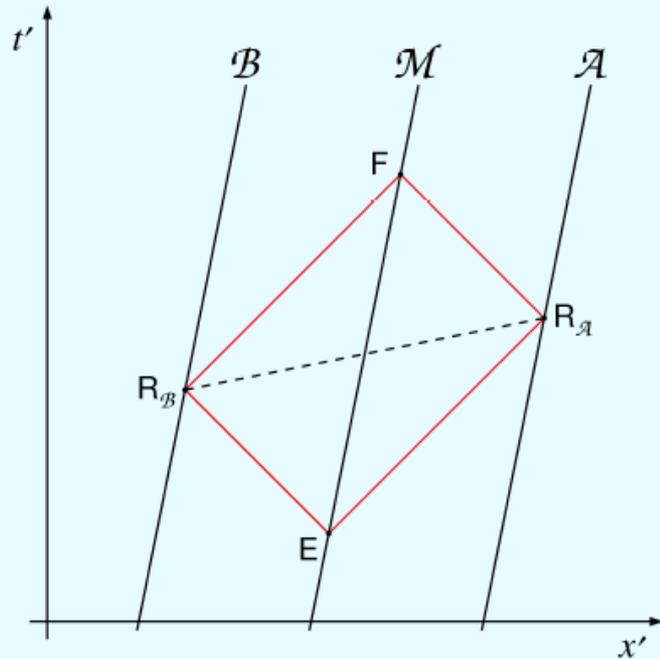
Fissiamo l'attenzione sui due eventi E, F. Questi in T hanno coordinate (t_E, x_E) , (t_F, x_F) mentre in S hanno coordinate (t'_E, x'_E) , (t'_F, x'_F) .

Cerchiamo la relazione fra

$$\Delta t = t_F - t_E$$

e

$$\Delta t' = t'_F - t'_E.$$



Nota bene

**non si può risolvere geometricamente
dalla figura perché la metrica non è
euclidea!**

Osserviamo che

$$\Delta x' = x'_F - x'_E = v \Delta t'$$

mentre

$$\Delta x = x_F - x_E = 0.$$

Basta allora usare l'invariante $\Delta\tau^2$:

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

$$\Delta t^2 = (\Delta t')^2 (1 - v^2)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Ecco la dilatazione: l'intervallo di tempo nel rif. S è *maggiore* di quello nel rif. T per il fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Fondamenti della Relatività

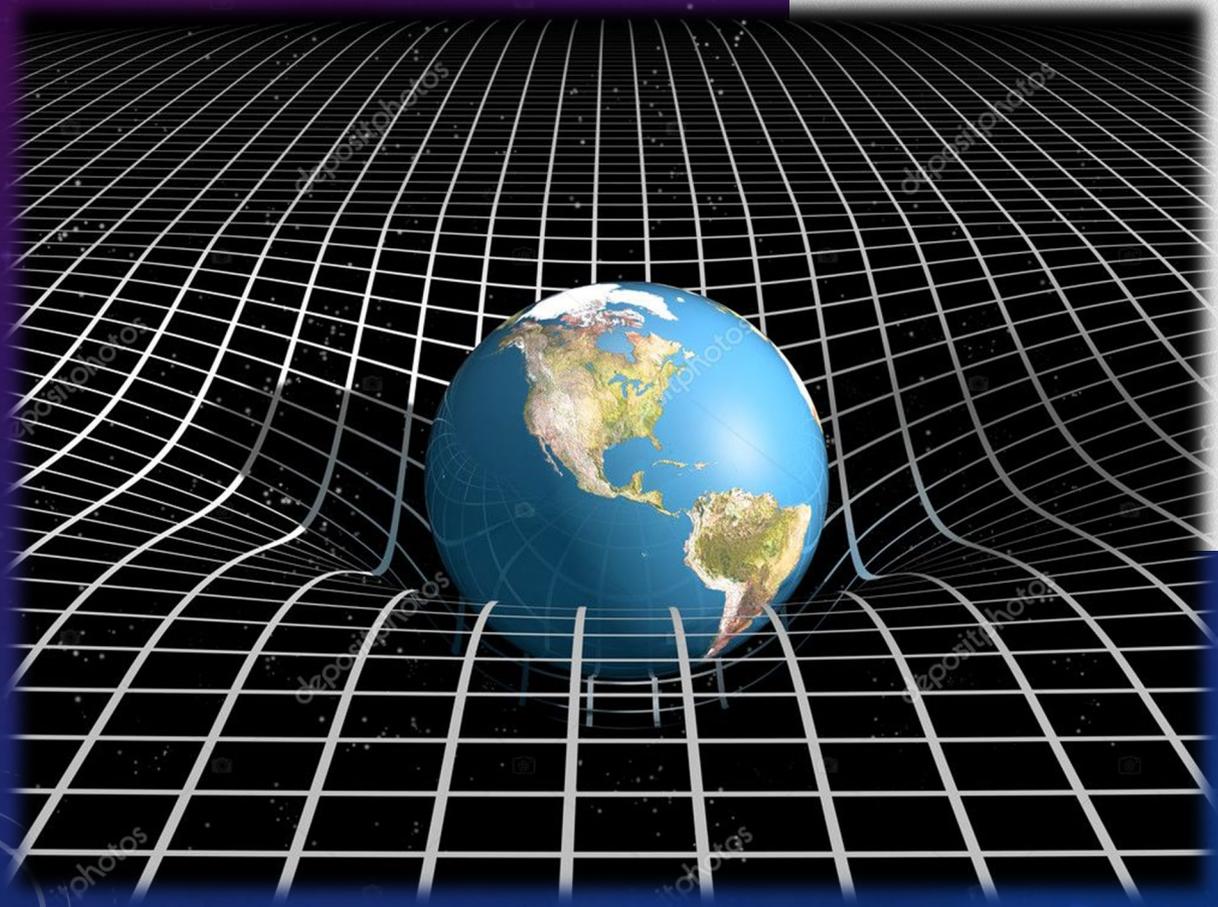
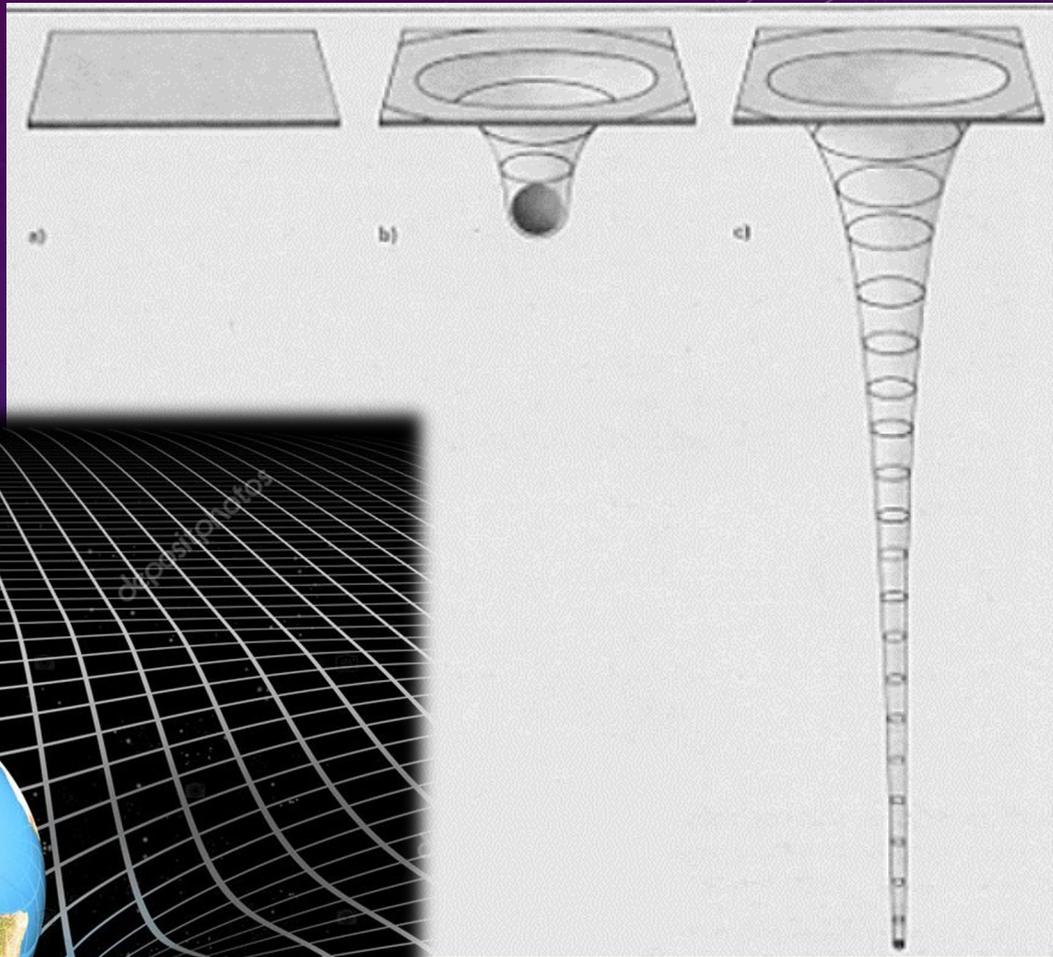
Principio di Equivalenza (Einstein) → Relatività Generale

Nessun esperimento consente di distinguere due riferimenti in moto tra loro

→ Tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi in due riferimenti in moto relativo

→ In particolare non si può distinguere un riferimento in caduta libera in campo gravitazionale da un riferimento inerziale perché la forza apparente nel sistema non inerziale è equivalente alla forza gravitazionale (PE debole)

Estendere il principio di equivalenza a tutti fenomeni fisici (PE forte) è alla base della cosmologia.



Il "canto" del satellite GPS e la Relatività

➤ Relatività Speciale:

Orbita con raggio medio $r=26573$ km e periodo di rivoluzione $T=12$ ore: $V = 2\pi r/T = 3,865$ km/s

Una velocità (su terra altissima) da confrontare con $c = 300.000$ km/s : il satellite GPS "canta" più lentamente, un suo secondo dura 1,000000000007 nostri secondi.

Alle precisioni richieste bisogna tenerne conto: fa una differenza di circa -7 micro-secondi al giorno !

- 2 km!

➤ Relatività Generale

La "curvatura dello spazio-tempo" (prodotta dalla massa della Terra) all'altitudine del satellite è minore di quella al suolo e il tempo è accelerato: +45 micro-secondi al giorno **+13.5 km!!**

http://it.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System

<http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/gps.html>

Camillo Berti *Topografia e cartografia*
www.geografia-applicata.it/wordpress/wp-content/uploads/2010/09/04_Topografia_GPS.pdf

Salvatore Mele e Paolo Strolin *Il Sistema di Posizionamento Globale (GPS)*
personalpages.to.infn.it/~cassardo/pensieri/2008_03_14.html

Elio Fabri *Insegnare relatività nel XXI secolo*
www.sagredo.eu