DI. FI. MA. in Rete

Scuola di Scienze della Natura

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

Fisica Torino

DIdatttica della FIsica e della MAtematica in Rete

Non è facile mantenere l’equilibrio … sperimentiamo in laboratorio col teorema di Ceva

M.G. Adesso[(1)], R. Capone**[(1)]**, O. Fiore[(2)] , F.S. Tortoriello[(1)]

(1) Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Salerno – Fisciano (SA)

(2) Liceo Scientifico “P.E. Imbriani” - Avellino


Geometria
Fisica

Geometria

Report Invalsi 2017

Tavola 3.8: Risultati della prova di Matematica di II secondaria di secondo grado per ambito – Italia

Ambito	Difficoltà media	Percentuale media risposte corrette
Numeri	199,45	49,78
Spazio e figure	214,72	41,02
Dati e previsioni	192,14	53,94
Relazioni e funzioni	205,28	46,30

Insegnamento della Geometria in Italia:
Riforme Scolastiche, Programmi, Libri di Testo

Metodo Euclideo: “Ginnastica” del Pensiero

1859

Legge Casati

[casati.pdf]

1867

Leggge Coppino

Revisione ed integrazione dei programmi scolastici Introduzione della “Geometria Razionale”

1867

L. Cremona

“Elementi di Euclide”
Un libro obbligatorio!

1867

GLI

ELEMENTI D'EUCLIDE

CON NOTE,

AGGIUNTE ED ESERCIZI

AD USO DE' GINNASI E DE' LICEI

ENRICO BETTI E FRANCESCO BRIOSCHI.

“[…] If we wish to teach Geometry as educationally effective as possible, we Have only to follow in or own schools the example of the English and reintroduce Euclid’s Elements, which are unversally acknowledged to be the most perfect model of regorous reasoning.

1881

Geometria Intuitiva

Introduzione alla geometria razionale al Ginnasio inferiore

1985

Settimio Cirillo

Geometria Elementi di geometria piana e solida

From Euclid as Textbook to the Giovanni Gentile Reform (1867–1923): Problems, Methods and Debates in Mathematics Teaching in Italy September 2006, Paedagogica Historica 42(4-5):587-613, [Livia Giacardi]

Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d’Italia, 24-10-1867

Se, come scrisse Pascal nei suoi *Pensieri*, « la Géométrie seule sait les véritables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer; s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, *que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle*, [1] » egli è indubitato che coloro i quali per debito d'ufficio sono chiamati a dirigere l'educazione nazionale, come quelli a cui essa è affidata o ne fruiscono, hanno stretto obbligo di curare che l'insegnamento della geometria nella istruzione media raggiunga quell'alto fine che da Pascal con tanta efficacia era espresso.

Prefazione di "Gli Elementi di Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei a cura di Enrico Betti e Francesco Brioschi

Geometria: Come insegnarla? Cosa insegnare?

Nuova Geometria del Triangolo

"Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva matematico milanese del secolo XVII"
Rivista ginnasiale e delle Scuole tecniche e erali, t. VI (1859), pp. 191-206.

Metodi

- **Metodo Ipotetico Deduttivo (Euclide)**
- **Approccio Intuitivo con applicazioni pratiche/reali**

Triangoli Ceviani, Ortici...

Topics

PREFAZIONE

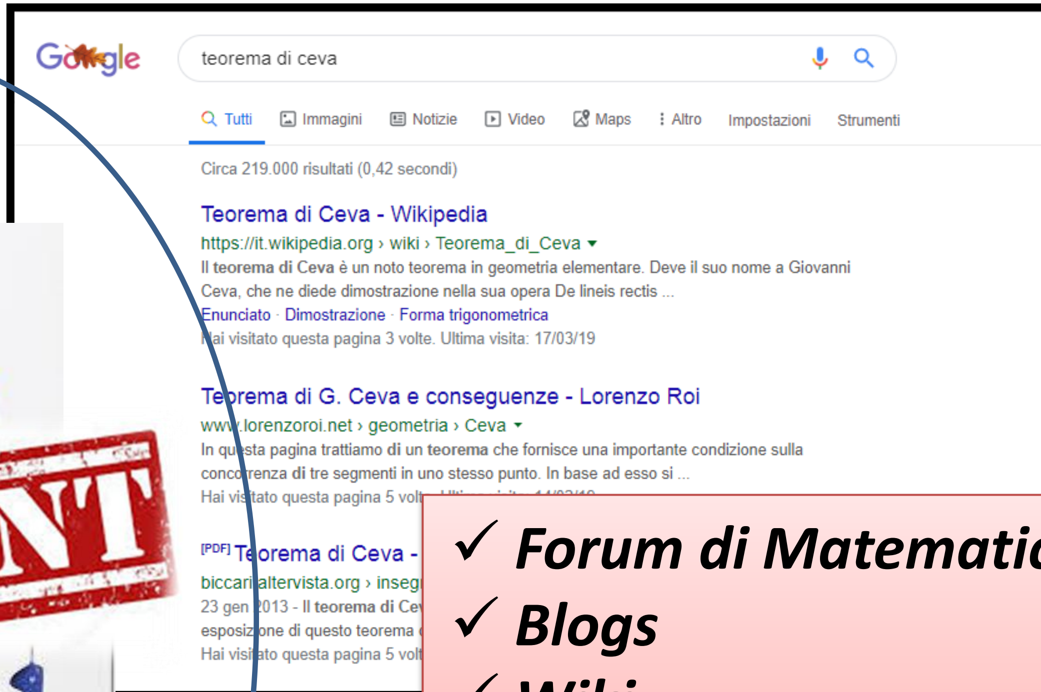
Nel 1873 Emilio Lemoine presentava al "Congresso di Lione dell'Associazione francese pel progresso delle Scienze" una memoria "**Sur quelques propriétés d'un point remarcable du triangle**" a cui era stato condotto dalla discussione di un problema che trovasi risolto nei "Théorémes et problemes de Géométrie élémentaire" di Ch. Lafremoire,

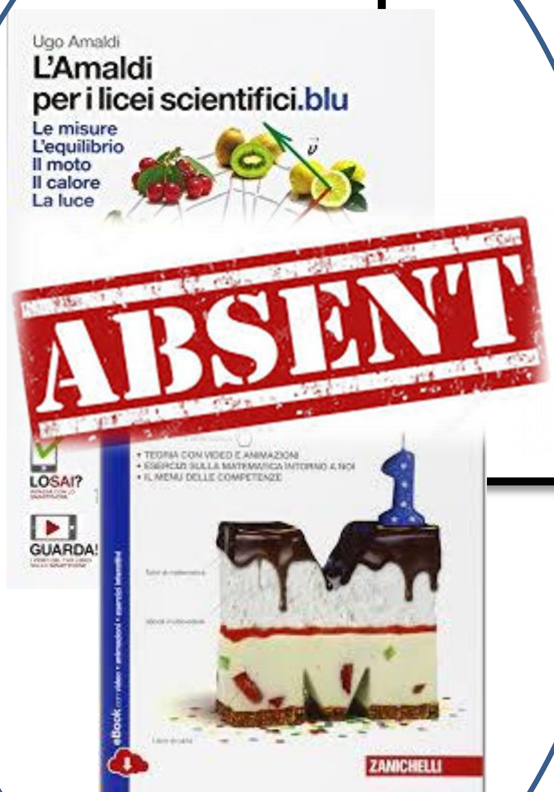
Mi sia ora permesso dire qualche parola del *perchè* del presente libro.
L'importanza che ormai ha acquistata la *Recente Geometria del triangolo* è indiscutibile. Essa si manifesta tanto coi progressi maravigliosi fatti in pochi anni che coi nomi degli insigni matematici che ad essa hanno consacrato preziose memorie ed incessanti ricerche. Ogni anno nuove pubblicazioni vengono ad arricchire la sua bibliografia. Ma esse trovansi disseminate nei periodici o nei rendiconti di Accademie di diverse nazioni, per cui i professori, i cultori delle Matematiche che hanno il dovere di mantenersi all'altezza del suo sviluppo, sono obbligati a lunghe ricerche, a perdite di tempo spesso eccessive. Il presente libro ha appunto il modesto scopo di rimediare in parte a tale inconveniente.

Ed infatti il fare della Geometria pura è spesso nei giovani fonte di difficoltà. È sopratutto necessario mettere fra le mani di essi il mezzo di trovare da loro stessi nuovi teoremi anzichè invitarli a ripetere quelli che di già esistono, e questo mezzo è incontestabilmente l'equazione.

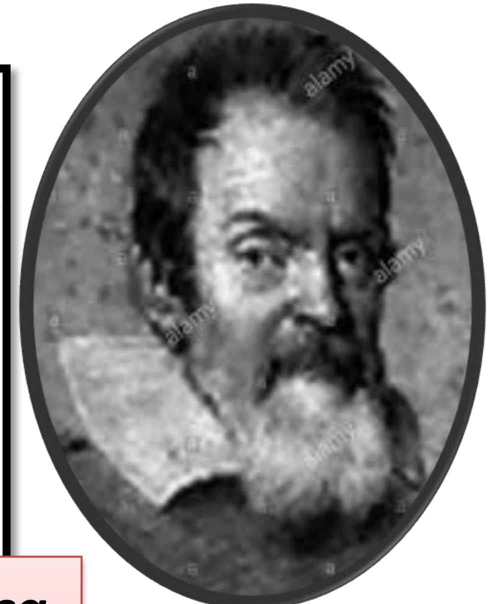
Teorema di Ceva

2019





- ✓ *Forum di Matematica*
- ✓ *Blogs*
- ✓ *Wiki*
- ✓ *Youtube*
- ✓ *Università*

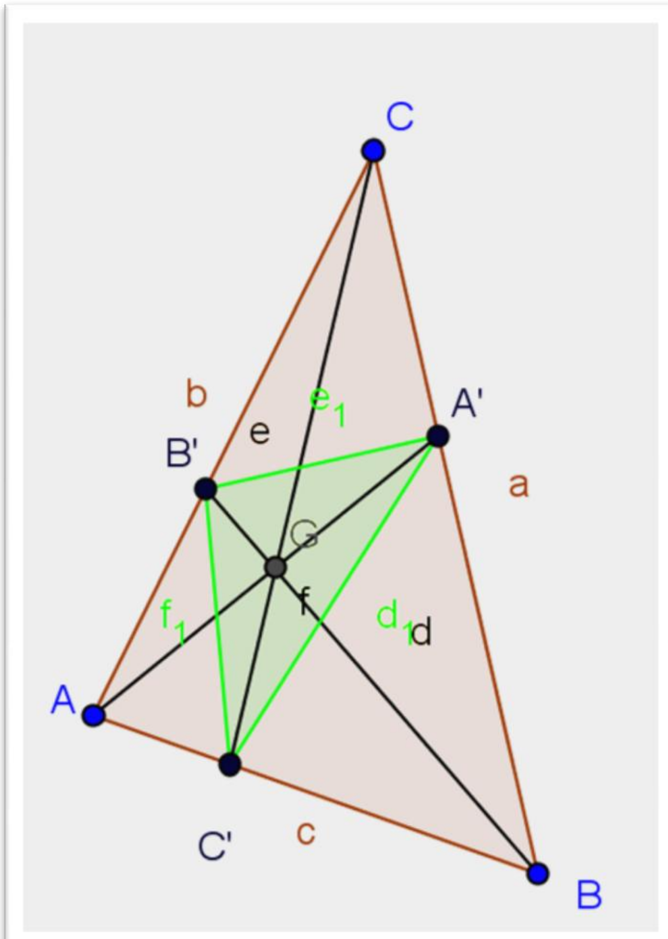


Giovanni Ceva (1647-1734)

L'attività

- **3 classi seconde**
- **Liceo Scientifico A. Genoino, Cava de' Tirreni (SA)**
- **Liceo P. Imbriani Avellino**
  - Indirizzo Ordinario
  - Indirizzo Scienze Applicate
  - Indirizzo Sportivo
- **Circa 100 alunni**
- **3 docenti**
- **3 ricercatori in didattica della matematica**

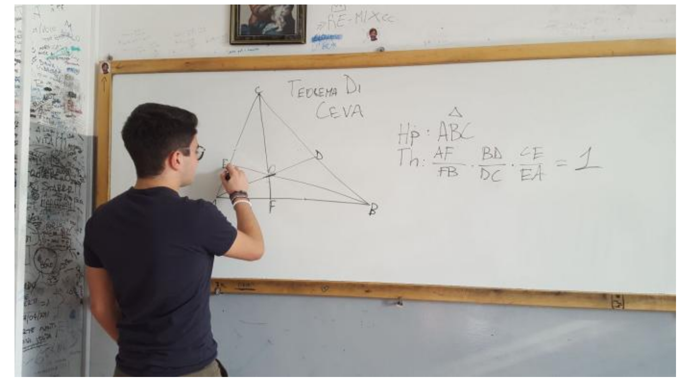
Triangoli Ceviani

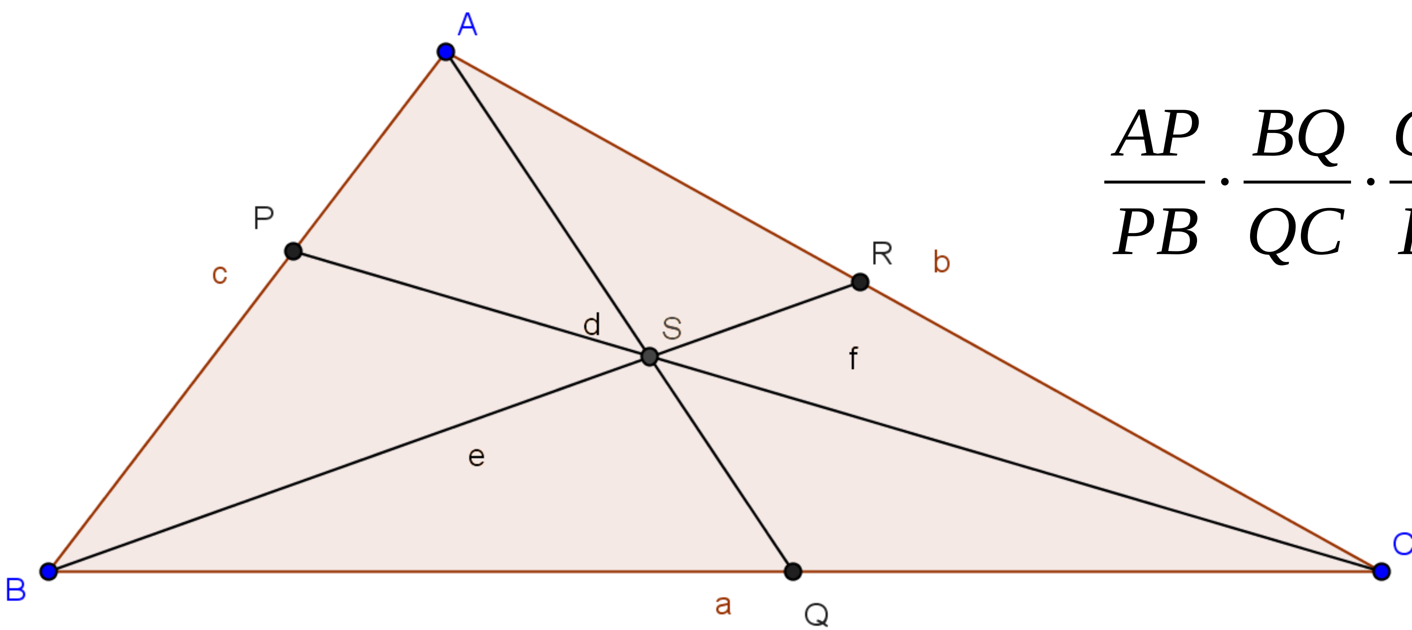


- **Ceviano** = Segmento che congiunge un vertice di un triangolo con un punto sul lato opposto.
- **Punto Ceviano** = Punto d’incontro di 3 ceviani
- A’B’C’ = **Triangolo Ceviano**

Teorema di Ceva

In un triangolo ABC, tre segmenti ceviani AQ, BR e CP sono concorrenti se e solo se:





$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Geometria Razionale

STANDARD
Standard
STANDARD
STANDARD

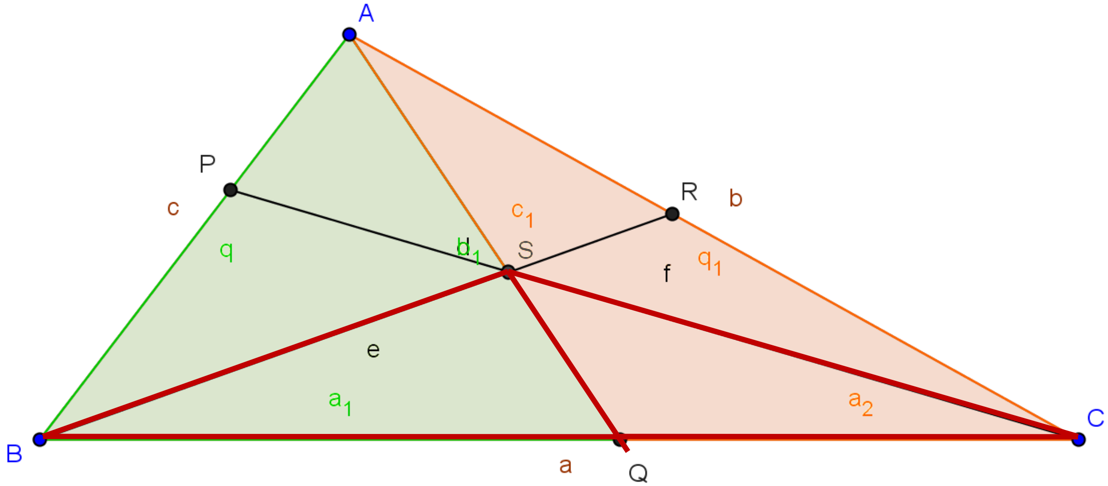
Teorema di CEVA [DIM $\Rightarrow$]

Hp: AQ, CP, PR sono concorrenti in un punto S

Th: $$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

DIM

OSS.1: Dati due triangoli con altezze congruenti, le loro aree sono proporzionali alle rispettive basi [Banalmente: $A_1=B_1H/2$, $A_2=B_2H/2$, da cui sostituendo $H=2A_2/B_2$ si ha $A_1/A_2=B_1/B_2$]



$$\frac{BQ}{QC}=\frac{A(ABQ)}{A(AQC)}$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{A(SBQ)}{A(SQC)}$$

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{A(ABQ)}{A(AQC)}=\frac{A(SBQ)}{A(SQC)}=\frac{A(ABQ)-A(SBQ)}{A(AQC)-A(SQC)}=\frac{A(ABS)}{A(ASC)}$$

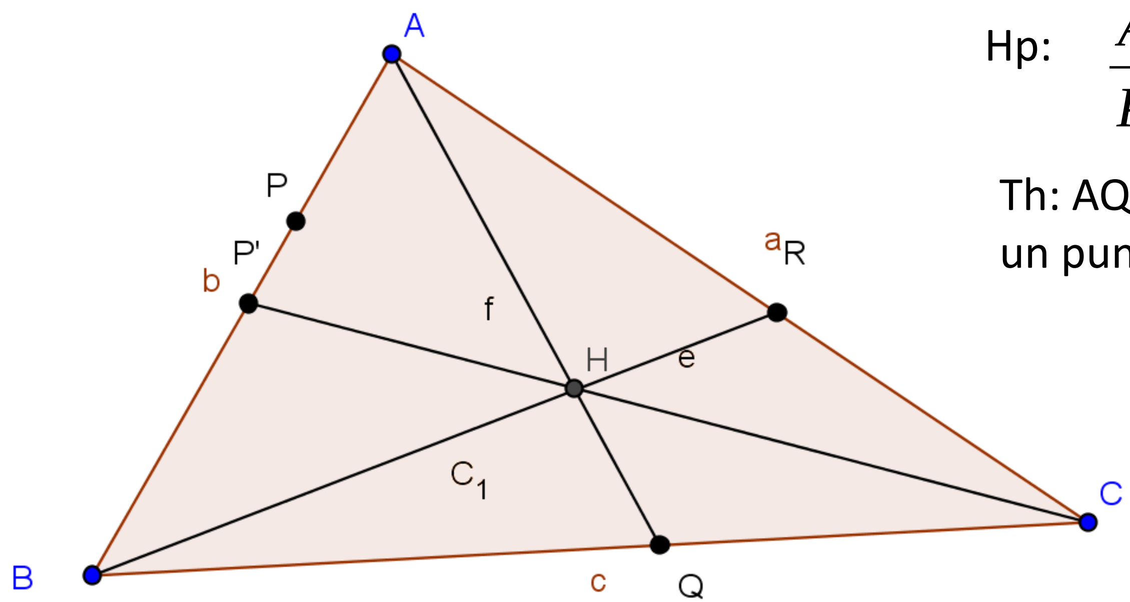
Analogamente

$$\frac{CR}{RA}=\frac{A(CBR)}{A(ABR)}=\frac{A(CSR)}{A(ASR)}=\frac{A(CBR)-A(CSR)}{A(ABR)-A(ASR)}=\frac{A(CBS)}{A(ABS)}$$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{A(APC)}{A(PBC)}=\frac{A(APS)}{A(PBS)}=\frac{A(APC)-A(APS)}{A(PBC)-A(PBS)}=\frac{A(ASC)}{A(CBS)}$$

$$\begin{cases}\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{A(ABS)}{A(ASC)}\\[2ex]\dfrac{CR}{RA}=\dfrac{A(CBS)}{A(ABS)}\\[2ex]\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{A(ASC)}{A(CBS)}\end{cases}\Rightarrow\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AP}{PB}=1$$

Teorema di CEVA [DIM $\Leftarrow$]



Hp: $$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Th: AQ, CP, PR sono concorrenti in un punto

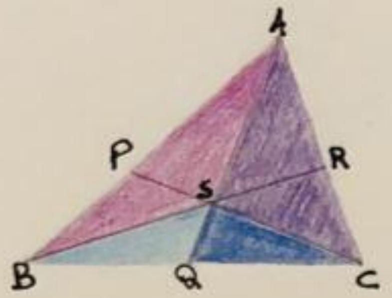
DIM

P.A. Siano AQ e BR concorrenti in un punto H, ma CP no, Esisterà un punto P'≠P, tale che CP' sia concorrente ad AQ e BR. Pertanto, per il teorema di Ceva diretto, varrà la relazione:

$$\frac{AP'}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

Essendo per ipotesi

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1\Rightarrow P\equiv P'$$



Hp

$\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ $\wedge$ $\overline{CP}$ sono concorrenti

Th

$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1$

Consideriamo il lato $\overline{BC}$:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{|A\hat{B}Q|}{|A\hat{Q}C|} = \frac{|S\hat{B}Q|}{|S\hat{Q}C|} = \frac{|A\hat{B}Q| - |S\hat{B}Q|}{|A\hat{Q}C| - |S\hat{Q}C|} = \frac{|A\hat{B}S|}{|C\hat{A}S|}$$

Consideriamo il lato $\overline{CA}$:

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{|C\hat{B}R|}{|A\hat{B}R|} = \frac{|C\hat{S}R|}{|A\hat{S}R|} = \frac{|C\hat{B}R| - |C\hat{S}R|}{|A\hat{B}R| - |A\hat{S}R|} = \frac{|C\hat{B}S|}{|A\hat{B}S|}$$

Consideriamo il lato $\overline{AB}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{|A\hat{P}C|}{|P\hat{B}C|} = \frac{|A\hat{P}S|}{|P\hat{B}S|} = \frac{|A\hat{P}C| - |A\hat{P}S|}{|P\hat{B}C| - |P\hat{B}S|} = \frac{|C\hat{A}S|}{|B\hat{C}S|}$$

Moltiplicando i rapporti al membro si ottiene:

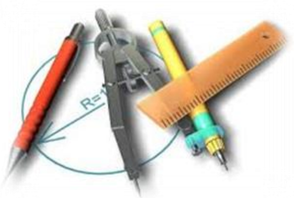
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{|A\hat{B}S|}{|C\hat{A}S|} \cdot \frac{|B\hat{C}S|}{|A\hat{B}S|} \cdot \frac{|C\hat{A}S|}{|B\hat{C}S|} = 1$$

come volevasi dimostrare.

Geometria Intuitiva


RAZIONALE
I RAGAZZI
"RIBELLI"
SI METTONO
ALL'OPERA

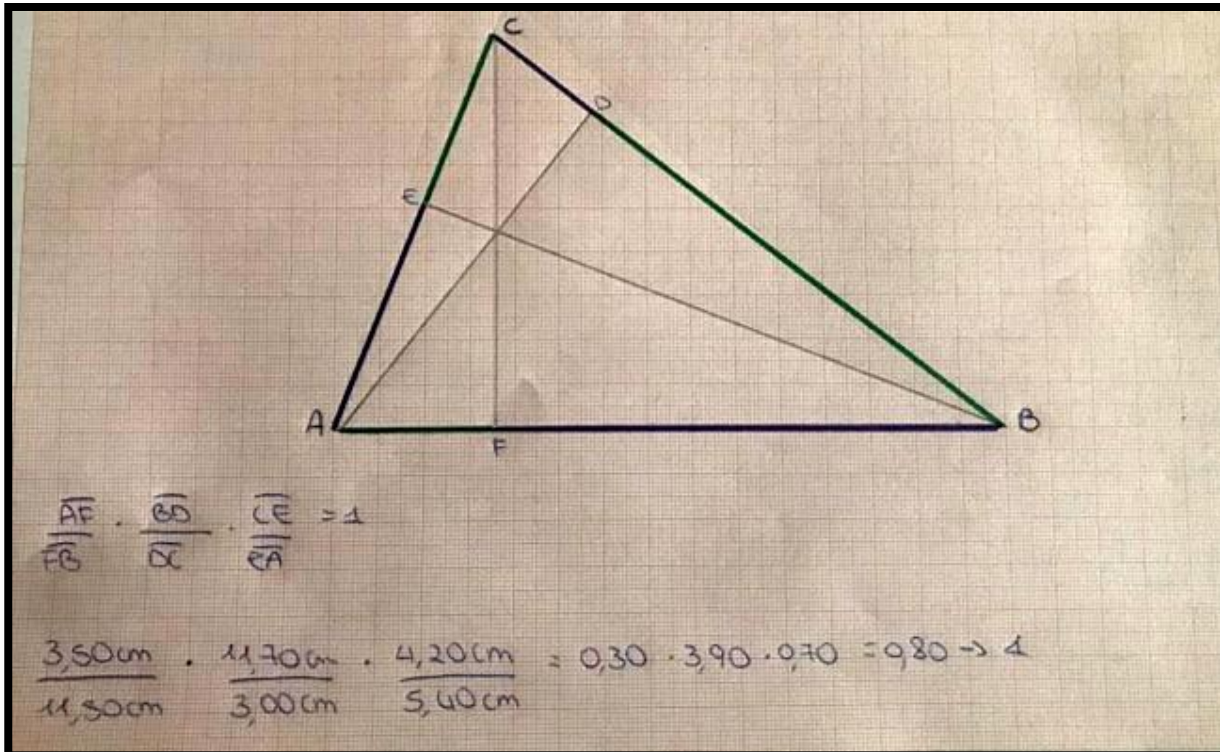
1) Riga, compasso



2) Software di Geometria Dinamica

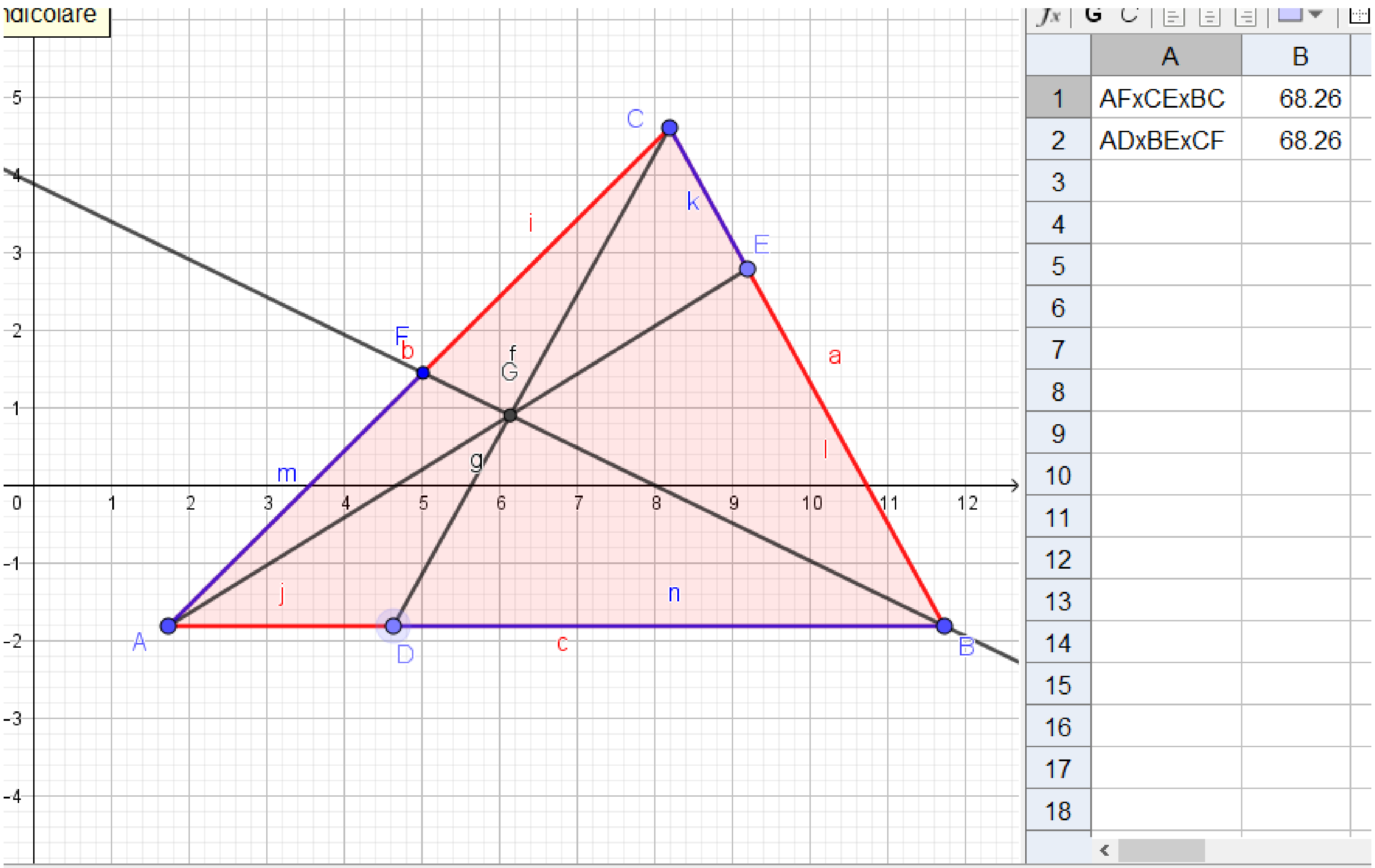
Verifica *vs* ***Dimostrazione***

Verifica Geometrica… con riga e compasso



E’ sempre vero?

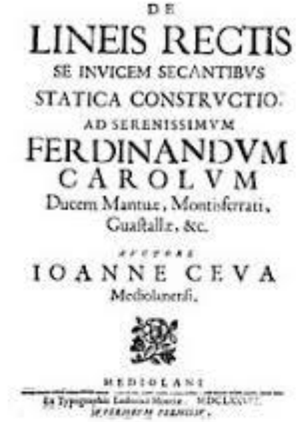
Verifica Geometrica…con GeoGebra



[TeoremaCEVAVErificaGEometrica.ggb]()


Geometria
Storia
Fisica

Il testo storico

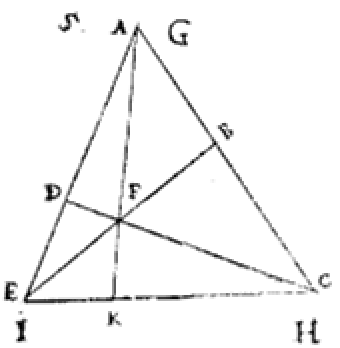

DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO.
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati,
Guaſtallæ, &c.
AVCTORE
IOANNE CEVA
Mediolanenſi.
MEDIOLANI

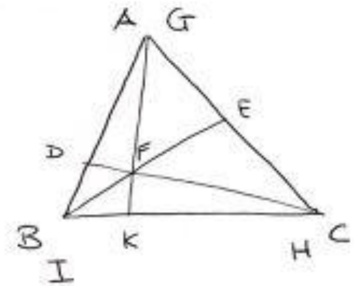
PROP. II. PROB. II. ELEM. II.

Sit triangulum E A C, & ab angulis ipſius ducantur ad idem punctum F intra triangulum lineæ E F, A F, C F, quæ ex F productæ occurrant lateribus in punctis deinceps B K D; Inſtitutum eſt, ex prædictis angulis E A C ſuſpendere grauia I G H; ita vt pondus G ad I ſit vt E D ad D A; idem G ad H, vt C B ad B A; H ad I, vt E K ad K C; pondus I ad duo G H, vt B F ad F E; pondus verò H ad duo I G, vt D F ad F C, & demum, vt vnicum G ad duo I H, ita K F ad F A.

Fiat vt C B ad B A, ita pondus G ad H, & vt E D ad D A, ita idem pondus G ad I. *tab. 1 fig. 5*

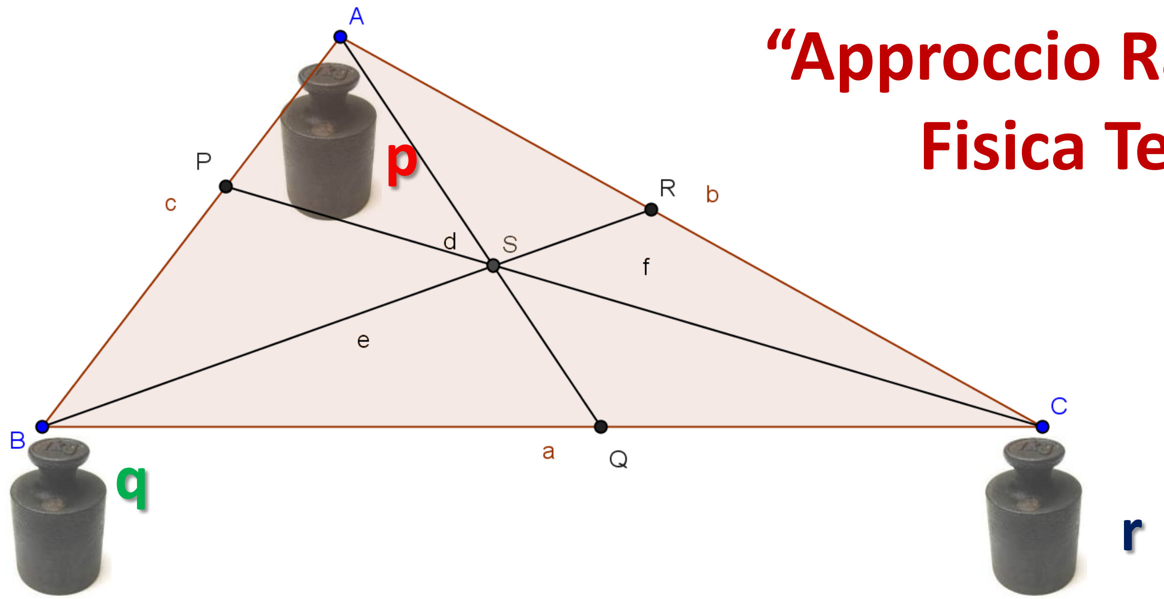
Quoniam igitur figura E D B A C F eſt illa primi elementi, eſtq; C B ad B A, vt G ad H, recta verò E D ad D A, vt G ad I; etiam D F ad F C, erit vt pondus H ad duo pondera I G; itemque B F ad F E, vt pondus I ad duo G H.





Sia dato il triangolo EAC; dagli angoli di questo siano condotte verso lo stesso punto F interno al triangolo le linee EF, AF, CF, che, prolungate da F, incontrino i lati rispettivamente nei punti B, K e D. Si supponga che, dai predetti ~~angoli EAC~~ angoli EAC, siano sospesi i pesi I, G e H; si ha che il peso di G sta al peso di I come ED sta a DA; allo stesso modo G sta ad H come CB sta a BA; H sta ad I come EK sta a KC; il peso I sta ai due pesi G ed H come BF sta ad FE; il peso H sta ai due pesi I e G, come DF sta ad FC, infine come il solo G sta ai due I ed H, come KF sta a FA.

Dimostrazione Fisica Teorema di Ceva



"Approccio Razionale": Fisica Teorica

Hp **p, q, r** ***pesi ai vertici A, B,C,*** **p : q = BP : PA , p : r = CR : RA**

Th

q : r = CQ : QB *;* p : (q+r) = QS : SA ; q : (p+r) = RS : SB; r : (p+q) = PS : SC

DIM P è il centro di gravità tra p e q (rispettivamente in A ed in B), R è il centro di gravità tra p ed r (in A e in C) e dunque il centro di gravità tra o, q ed r è S, punto di intersezione tra CP e BR. Di conseguenza, il centro di gravità tra q ed r è l'intersezione tra AS e BC, cioè Q. Analogamente, S è il centro di gravità tra p e (q+r) posti rispettivamente in A in Q, quindi:

p : (q+r) = QS : SA

E così via...

Luigi Cremona, Intorno ad un'operetta di Giovanni Ceva, matematico milanese del secolo XVII, 1860

Approccio Intuitivo <-> Fisica Sperimentale

Aula

Spazio Laboratoriale

Cooperative Learning

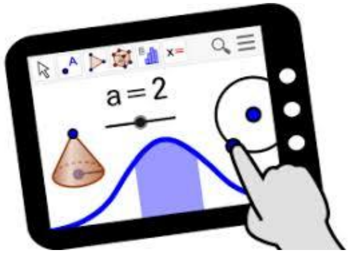
Verifica Sperimentale del Teorema di Ceva

Triangoli “in equilibrio”

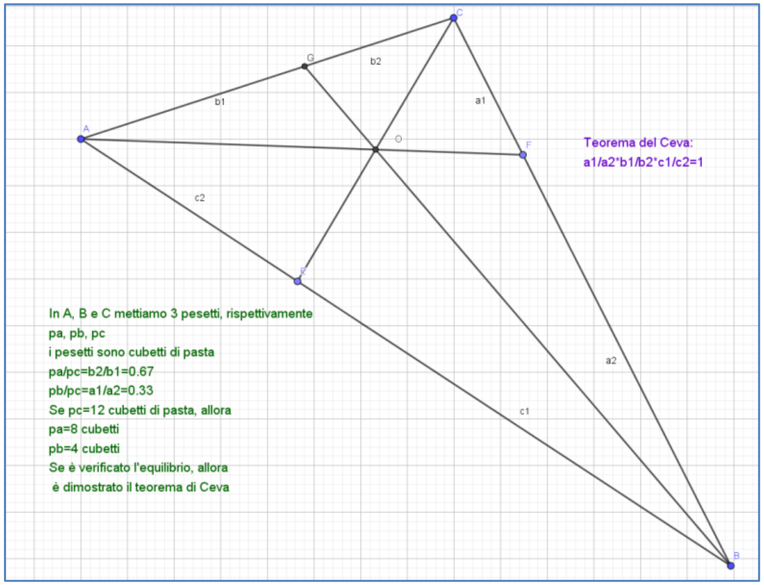
Forbici, carta millimetrata, colla, squadrette, ……

Pasta e bilancia

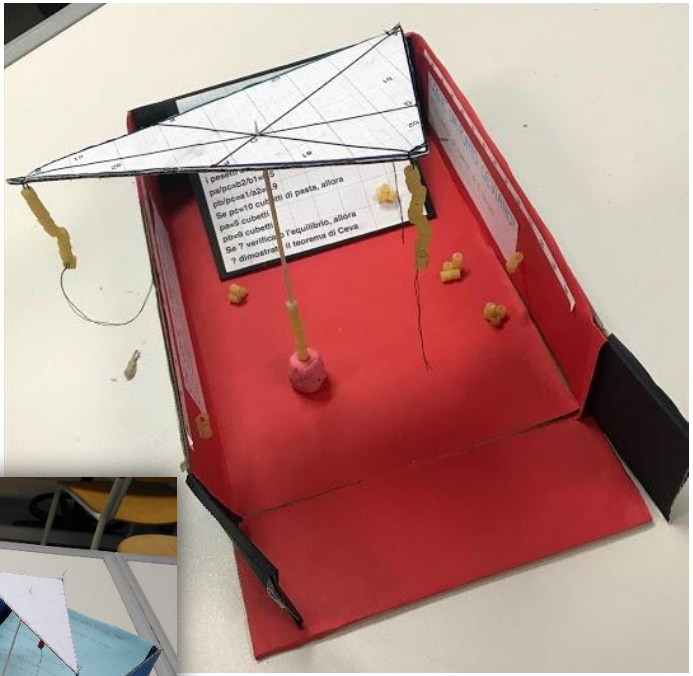
Triangolo “in equilibrio” con Geogebra



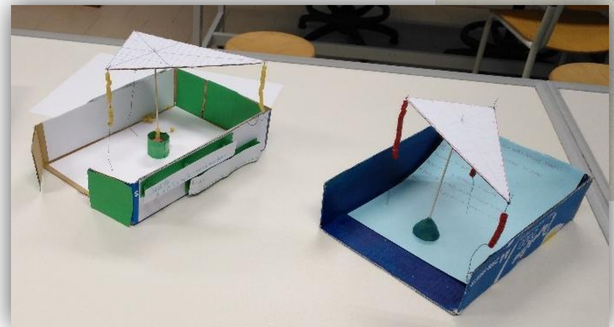
Il calcolo simbolico



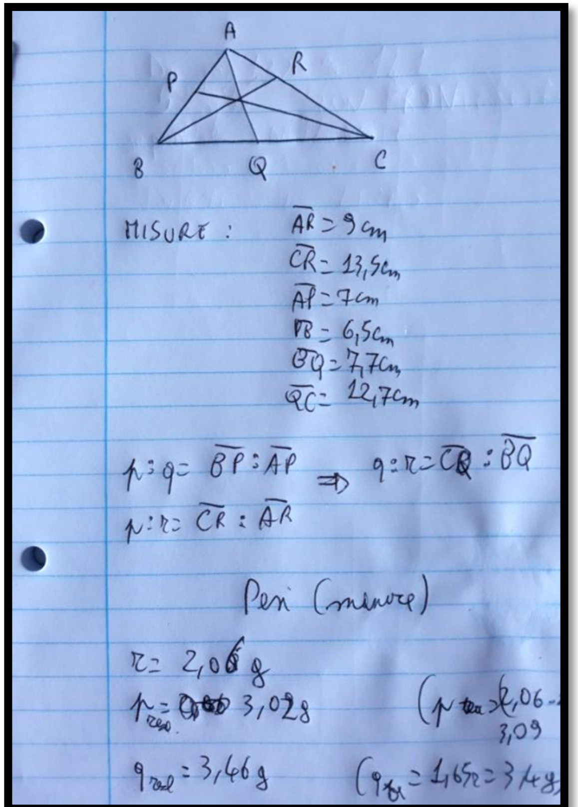
Costruzione e sperimentazione del modello

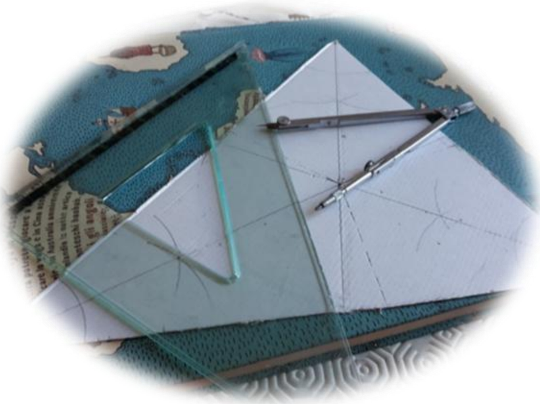


Unità di misura=

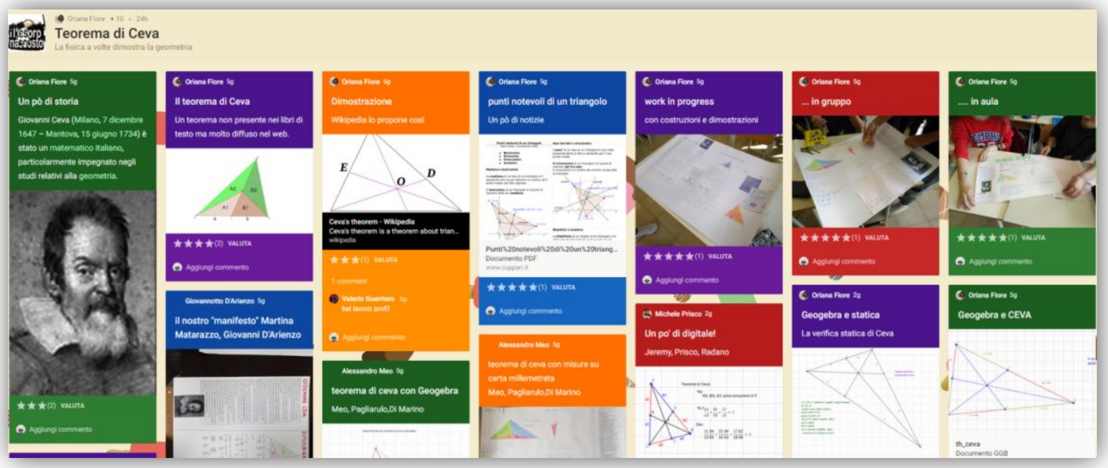


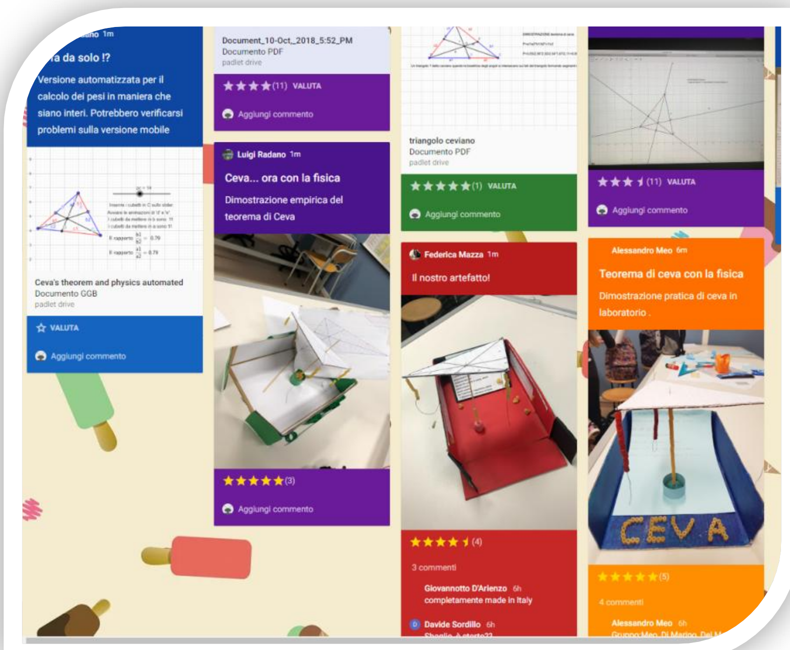
Triangolo "in equilibrio" nell'incentro

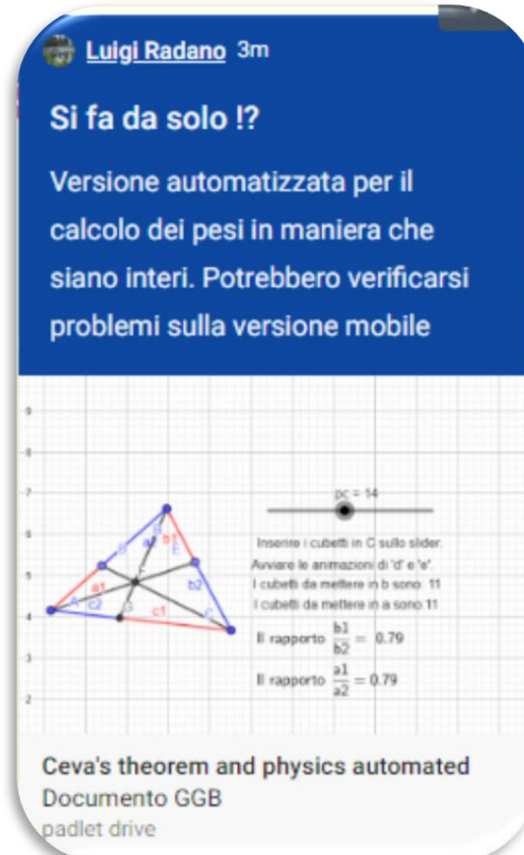




Documentazione: Software su Cloud Padlet

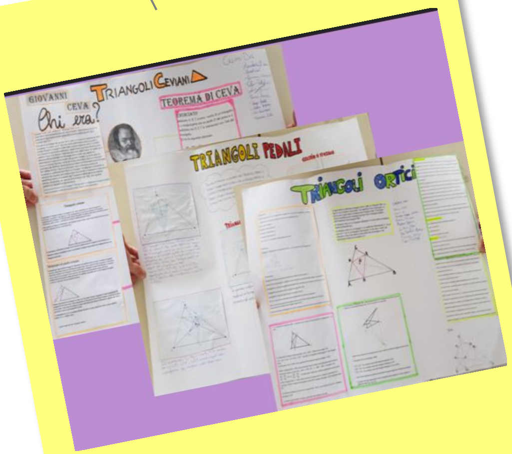






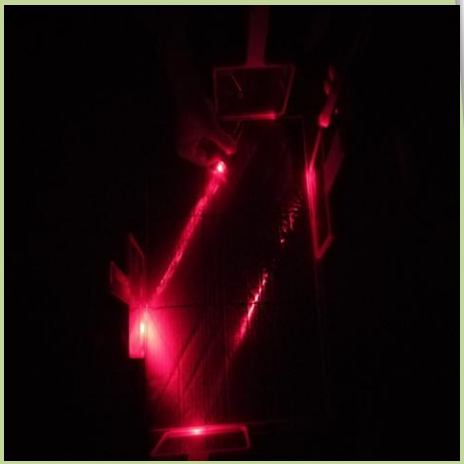
[Padlet]

Altre attività…



Triangoli ortici
Triangoli pedali

Quadrilateri Ortici e Biliardo



Biliardo di Luce

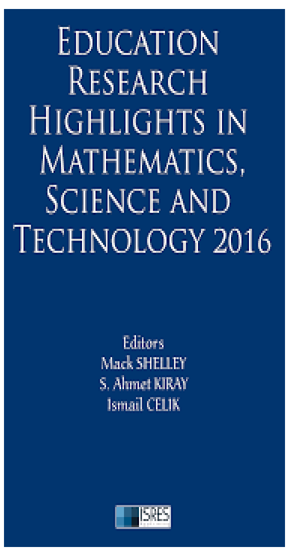
Attività di Ricerca

Discovering Neglected Synthetic Geometry on Social Networks: Learning Maths as in the Historical Italian Acadamies

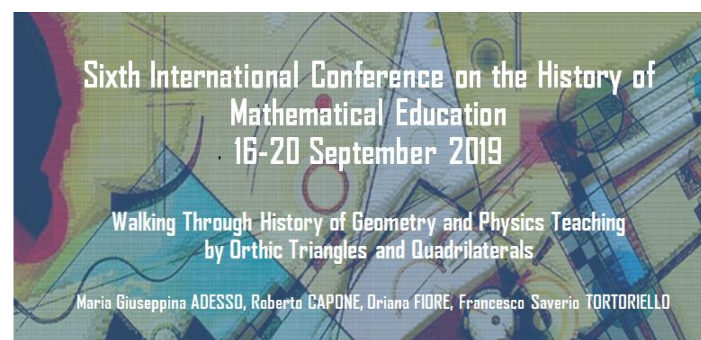
Maria Giuseppina ADESSO, Roberto CAPONE Oriana FIORE , Francesco Saverio TORTORIELLO

Mathematics Learning and Teaching in an Interdisciplinary Framework, Simulating Ancien Italian Academies

Maria Giuseppina ADESSO, Roberto CAPONE Oriana FIORE , Francesco Saverio TORTORIELLO



To be published as a chapter for the book
"Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2019".
Editors of the book Prof.Dr. Mack Shelley
Planned publication date October 2019
ISRES publishing



Maria Giuseppina Adesso: madesso@unisa.it
Roberto Capone: rcapone@unisa.it
Oriana Fiore: orianafio@gmail.com
Francesco Saverio Tortoriello: fstortoriello@unisa.it