OSSERVARE, IPOTIZZARE E ARGOMENTARE: un percorso didattico dai dadi alle equazioni

Federica Mennuni & Eleonora Faggiano

Dipartimento di Matematica - Università di Bari Aldo Moro

IX CONVEGNO NAZIONALE DI **DI**DATTICA DELLA **FI**SICA E DELLA **MA**TEMATICA - **DI.FI.MA. 2019**

Matematica e Fisica nella cultura e nella società

9-10-11 ottobre 2019

Dalle Indicazioni Nazionali

La matematica permette di sviluppare competenze importanti per la formazione di una cittadinanza consapevole:

"In particolare, la matematica (...) contribuisce a ***sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri."***

Quadro teorico

- "Il senso matematico delle cose" (Arzarello)
- Metodo della Ricerca Variata (Arzarello)
  - La logica dell'investigazione (Hintikka, 1999)
  - La teoria della variazione (Marton, 2014)

- Le pratiche didattiche definiscono e danno significato agli argomenti
- Dalle pratiche didattiche gli studenti elaborano delle “regole per sopravvivere”

Il senso degli studenti per la matematica

- Tale senso in generale differisce da quello degli insegnanti

Il Metodo della Ricerca Variata (MRV)

I. Una situazione: osservare (Oi), formulare domande (Dj), dare risposte (Rk)

II. Modificare una (o più) Oi negandola (quindi variando la situazione) → $(\sim Oi)_k$.

III. Nascono nuove osservazioni (Oi)*, ulteriori domande (Dj)*, e risposte (Rk)*.

Perché è così? (I)

Che cosa capita se non è così? (II–III)

La teoria della variazione

CONTRASTO: fare esperienza di un concetto, sperimentando anche qualcosa di diverso, al fine di poterli confrontare

GENERALIZZAZIONE: fare esperienza di diverse situazioni in cui il concetto di manifesta, in modo da coglierne gli aspetti critici, separandoli da quelli non rilevanti

SEPARAZIONE: cogliere la distinzione tra i diversi aspetti critici di uno stesso concetto, osservandone separatamente la variabilità, mentre gli altri aspetti non cambiano

FUSIONE: cogliere diversi aspetti critici di un concetto, osservandone simultaneamente la variabilità

Domande di ricerca

- Quali sono i processi argomentativi che gli studenti sviluppano nel cercare giustificazioni al proprio pensiero?
- Quali caratteristiche devono avere le attività perché possano promuovere lo sviluppo di tali processi?
- Qual è il ruolo del docente in questo tipo di attività?

Domande di ricerca

- Quali sono i processi argomentativi che gli studenti sviluppano nel cercare giustificazioni al proprio pensiero?
- Quali caratteristiche devono avere le attività perché possano promuovere lo sviluppo di tali processi?
- Qual è il ruolo del docente in questo tipo di attività?

Metodologia

- 16 alunni di Classe II – Liceo Scientifico – Margherita di Savoia (BT)
- Tempo impiegato in aula: 3 ore
- Due cicli di lavoro di gruppo con discussione collettiva
- Dati: registrazioni video e trascrizioni dei dialoghi, protocolli degli studenti

Le fasi fondamentali dell’attività

- Osservare
- Ipotizzare
- Argomentare
- Dai dadi (lavoro in piccoli gruppi) alle equazioni (discussione collettiva guidata dall’insegnante)

Che cosa osservate?

Sistemate 6 dadi di un colore e 10 dadi di un altro colore riproducendo la configurazione in figura.

4	4	4	6
4	4	6	6
4	6	6	6
6	6	6	6

E se cambiassero i valori sui dadi?

A. In quanti altri possibili modi si possono disporre i 6 dadi di un colore e i 10 dadi dell'altro colore in modo che la **differenza** tra il numero che compare sui due gruppi di dadi sia, **in valore assoluto**, sempre **uguale a 2**?

B. Come potete esprimere la relazione che c'è tra i valori sui dadi e quelli delle somme ottenute?

Verso la formalizzazione algebrica…

S1: Noi abbiamo calcolato così: 6*4 e poi abbiamo fatto 10*6 e abbiamo ottenuto 84

S4: Però **mantenendo sempre 6 e 10, dobbiamo solo cambiare i valori**, ad esempio, di 4 e 6 e quindi abbiamo 1 e 3, 2 e 4, 3 e 5, 3 e 1, e così via

$$6 * n_1 + 10 * n_2$$

Verso la formalizzazione algebrica…

S1: Noi abbiamo calcolato così: 6*4 e poi abbiamo fatto 6*10 e abbiamo ottenuto 84

S4: Però **mantenendo sem**

… di 4 e 6 e quindi

… e 3, 2 e 4, 3 e 5, 3 e 1, e così via

GENERALIZZAZIONE

$$6 * n_1 + 10 * n_2$$

La scoperta delle prime regolarità

I: Si può osservare qualcosa?

S1: **La differenza è sempre 8**

I: La differenza tra chi?

S1: Tra le due. Ad esempio abbiamo (1,3) e la differenza tra 36 e 28 è uguale a 8, la differenza tra 52 e 44 è 8, tra 68 e 60 è 8, tra 84 e 76 è 8

Di.Fi.Ma. 2019

Valore sui sei dadi	Valore sui dieci dadi	Somma totale
3	1	28
1	3	36
4	2	44
2	4	52
5	3	60
3	5	68
6	4	76
4	6	84

S1: Tra le due. Ad esempio abbiamo (1,3) e la differenza tra 36 e 28 è uguale a 8, la differenza tra 52 e 44 è 8, tra 68 e 60 è 8, tra 84 e 76 è 8

Perché la differenza tra (1,3) e (3,1) è 8?

S1: Nel primo caso 3 ha 6 dadi, mentre 1 ne ha 10 di dadi, nel secondo caso 1 sta su 6 dadi, mentre il … sta su 10 dadi e quindi **è al…** **che** … **minore** … 6 dadi hanno valore 1

CONTRASTO

I: E perché 8?

S1: Perché **la differenza tra 6 e 10 è 4 e quella tra 3 e 1 è 2 quindi 4*2 fa 8**

Perché la differenza tra (1,3) e (3,1) è 8?

S1: Nel primo caso 3 ha 6 dadi, mentre 1 ne ha 10 di dadi, nel secondo caso 1 sta su 6 dadi, mentre il 3 sta su 10 dadi e quindi **è abbastanza logico dire che** quando i 6 dadi hanno valore 3 **è minore** rispetto a quando i 6 dadi hanno valore 1

I: E perché 8?

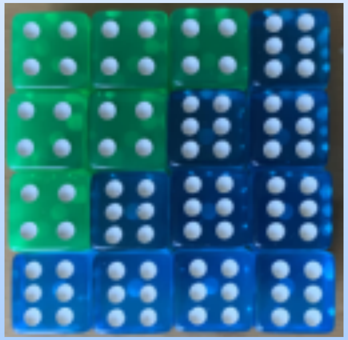
S1: Perché **la differenza tra 6 e 10 è 4 e quella tra 3 e 1 è 2 quindi 4*2 fa 8**

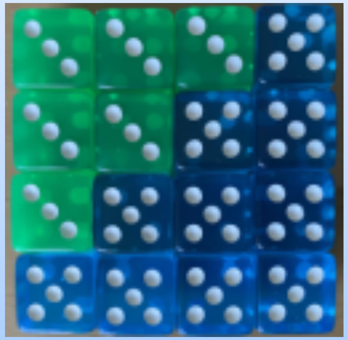
Cosa succede se passo da (4,6) a (3,5)?

Valore sui sei dadi (A)	Valore sui dieci dadi (B)	Somma totale $6 * A + 10 * B$
3	1	28
1	3	36
4	2	44
2	4	52
5	3	60
3	5	68
6	4	76
4	6	84

Perché la differenza tra (4,6) e (3,5) è 16?

S1: Se io ho 10 dadi da 6 e 6 dadi da 4, la somma sarà 84. E poi io sposto e questo da 4 diventa 3 e quindi poi naturalmente tutti questi diventano 3 e quindi ottengo 6*3, e poi questo diventa 5 e così per tutti e quindi **è come se io vado a levare un valore e un valore**





Il senso matematico del girare i dadi

- video (38:17)

Il senso matematico del girare i dadi

S1: La differenza rimane 4, però raddoppia perché io vado a cambiare il valore sul dado e quindi diminuisco di 16, cioè vado da 8, tolgo 16 cioè 8 e moltiplico per 2 perché è cambiato il valore da 4 a 3 e da 6 a 5 e quindi 4-3=1 e 6-5=1

$$\underbrace{(10-6)}_{\text{Differenza del numero di dadi}} * \underbrace{(6-4)}_{\text{Differenza tra i valori sui dadi}} * \underbrace{[(4-3)+(6-5)]}_{\text{Somma delle differenze tra i valori sui due gruppi di dadi}}$$

E se i dadi fossero 9?

A. Come cambia la somma al variare del numero A sui 3 dadi dello stesso colore e del numero B sugli altri 6 dadi se la differenza tra A e B, in valore assoluto, è sempre 2?

4	4	6
4	6	6
6	6	6

B. E se la differenza tra A e B, in valore assoluto, è 3?

E se i dadi fossero 9?

A. Come cambia la somma al variare del numero A sui 3 dadi dello stesso colore e del numero B sugli altri 6 dadi se la differenza tra A e B, ... assoluto, è s...

SEPARAZIONE

4	4	6
4	6	6
6	6	6

B. E se la differenza tra A e B, in valore assoluto, è 3?

E se i dadi fossero 9?

Valore sui tre dadi (A)	Valore sui sei dadi (B)	Somma totale $3 * A + 6 * B$
4	1	18
1	4	27
5	2	27
2	5	36
6	3	36
3	6	45

B. E se la differenza tra A e B, in valore assoluto, è 3?

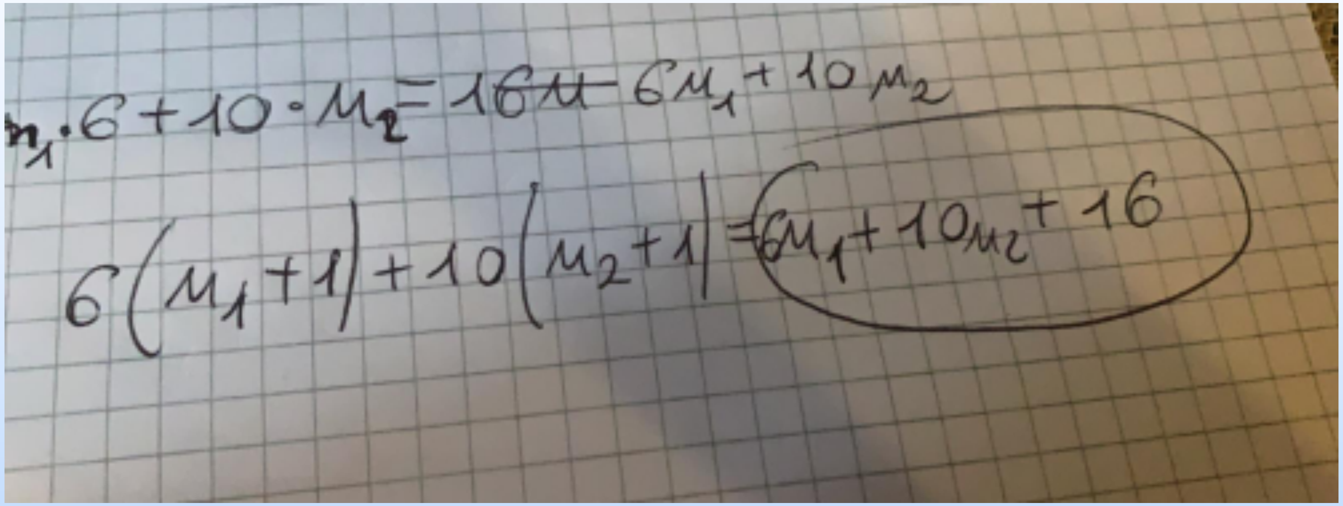
Perché la differenza tra (3,6) e (2,5) è 9?

Riapplicando il ragionamento precedente…
qualcosa non va…

$$\underbrace{(6 - 3)}_{\text{Differenza del numero di dadi}} * \underbrace{(5 - 2)}_{\text{Differenza tra i valori sui dadi}} * \underbrace{[(3 - 2) + (6 - 5)]}_{\text{Somma delle differenze tra i valori sui due gruppi di dadi}}$$

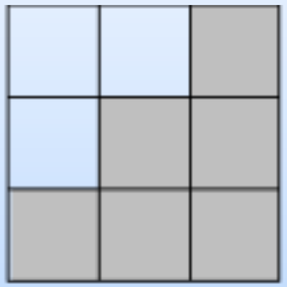
$$3 * 3 * 2 = 18!$$

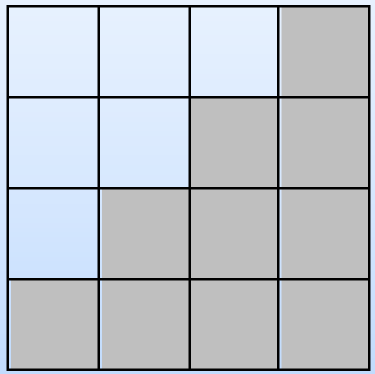
Dai dadi alle equazioni



Dai dadi alle equazioni… e viceversa...

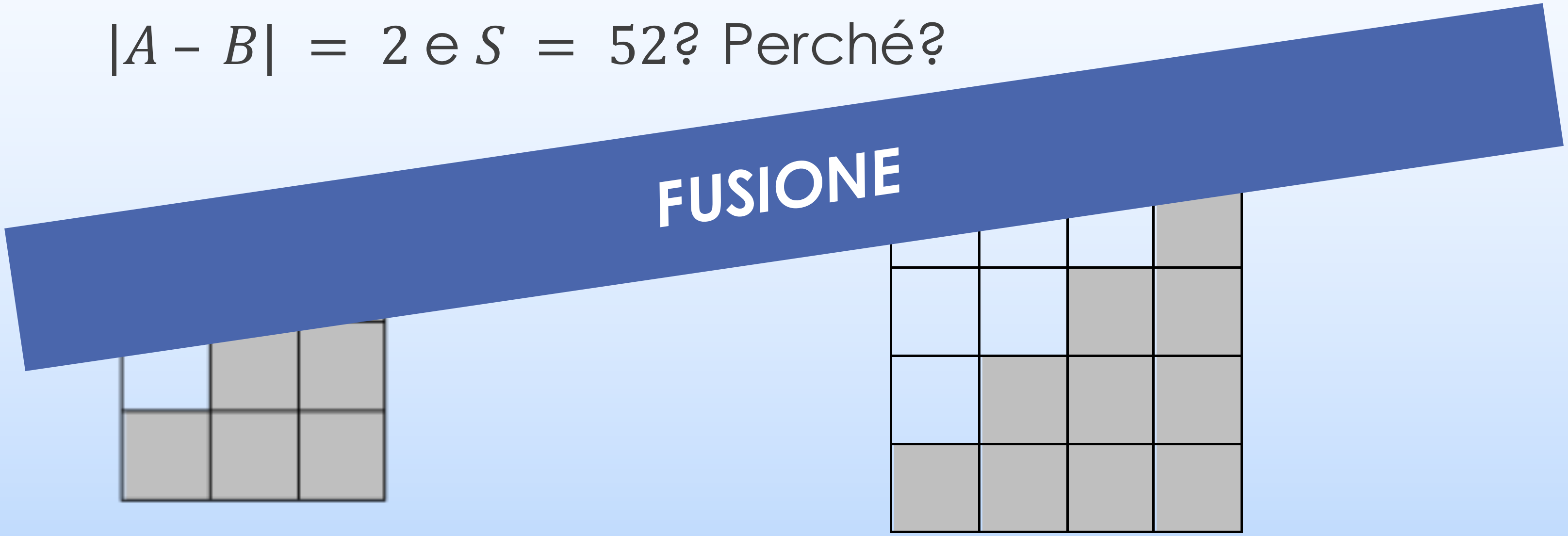
A. È possibile scegliere A e B in modo tale che $|A - B| = 2$ e $S = 52$? Perché?





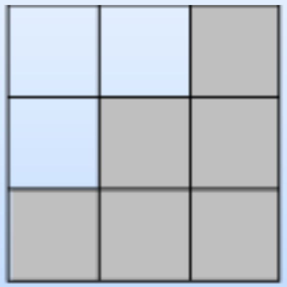
Dai dadi alle equazioni… e viceversa...

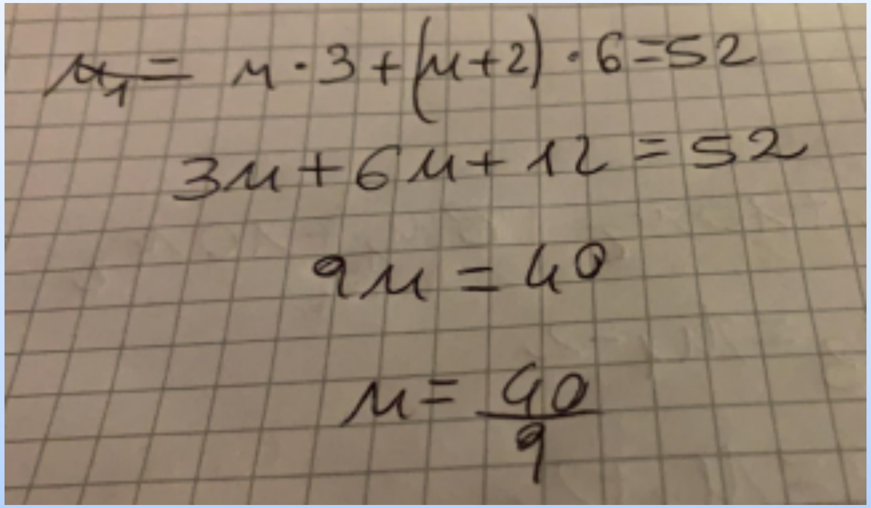
A. È possibile scegliere A e B in modo tale che $|A - B| = 2$ e $S = 52$? Perché?



Dai dadi alle equazioni… e viceversa...

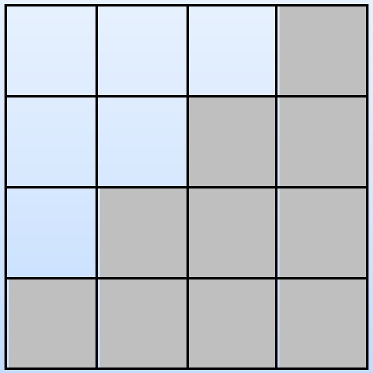
A. È possibile scegliere A e B in modo tale che $|A - B| = 2$ e $S = 52$? Perché?

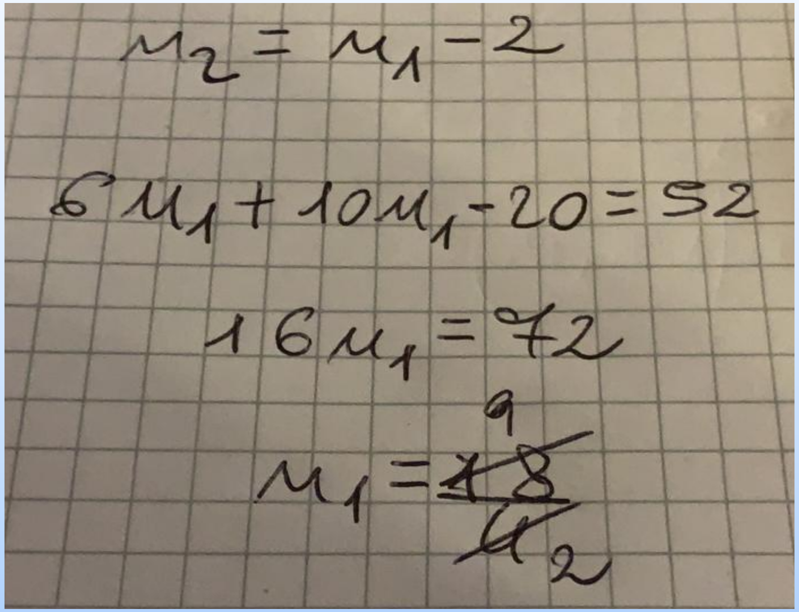




Dai dadi alle equazioni… e viceversa…

A. È possibile scegliere A e B in modo tale che $|A - B| = 2$ e $S = 52$? Perché?





Conclusioni

- L'attività con i dadi, basata sulla MRV, per osservare, ipotizzare e argomentare
- Il senso delle equazioni come strumento di interpretazione e risoluzione di nuovi problemi

OSSERVARE, IPOTIZZARE E ARGOMENTARE: un percorso didattico dai dadi alle equazioni

Federica Mennuni & Eleonora Faggiano

Dipartimento di Matematica - Università di Bari Aldo Moro

IX CONVEGNO NAZIONALE DI **DI**DATTICA DELLA **FI**SICA E DELLA **MA**TEMATICA - **DI.FI.MA. 2019**

Matematica e Fisica nella cultura e nella società

9-10-11 ottobre 2019