

Torino, 10 ottobre 2019



Francesca Ferrara
Giulia Ferrari
Ketty Savioli

IX CONVEGNO NAZIONALE DI DIDATTICA DELLA FISICA E DELLA
MATEMATICA

DI.FI.MA. 2019

MATEMATICA E FISICA NELLA CULTURA E NELLA SOCIETÀ

9-10-11 ottobre 2019

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO:

teoria dei numeri con lo spirografo
nella scuola primaria

LO SPIROGRAFO

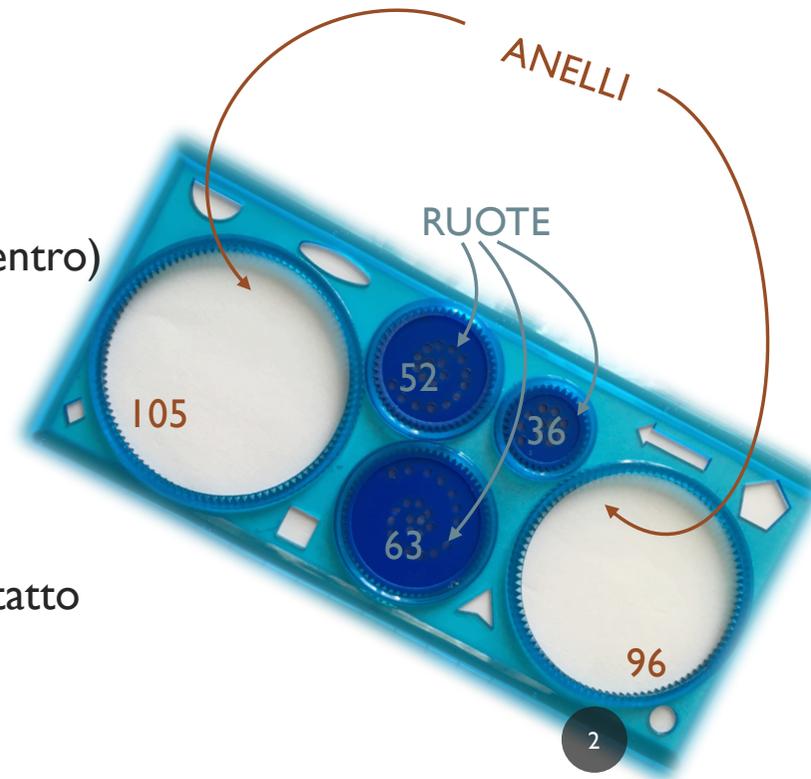
Lo Spirografo è uno strumento di disegno. Fu inventato dall'ingegnere britannico Denys Fisher (1965) e commercializzato come giocattolo.

COME È FATTO

- composto da una serie di ingranaggi, di diverso diametro
- ciascun elemento ha un bordo dentato
- ciascuna ruota presenta una serie di fori (distanza diversa dal centro)

COME SI USA

- si sceglie una combinazione ruota-anello
- si inserisce la matita in uno dei fori
- si fa ruotare la ruota all'interno dell'anello mantenendola a contatto
- la matita traccia così una curva...



LO SPIROGRAFO

Lo Spirografo è uno strumento di disegno. Fu inventato dall'ingegnere britannico Denys Fisher (1965) e commercializzato come giocattolo.

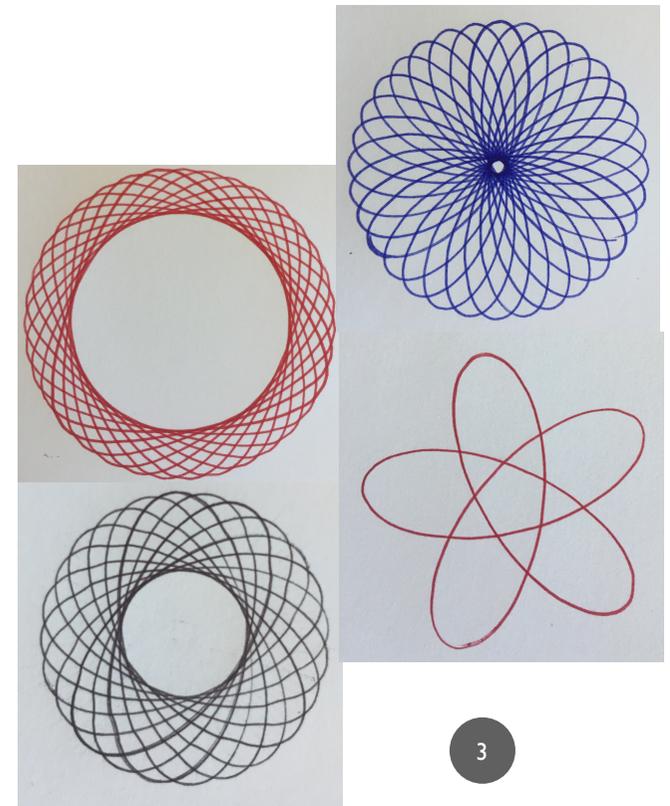
COME È FATTO

- composto da una serie di ingranaggi, di diverso diametro
- ciascun elemento ha un bordo dentato
- ciascuna ruota presenta una serie di fori (distanza diversa dal centro)

COME SI USA

- si sceglie una combinazione ruota-anello
- si inserisce la matita in uno dei fori
- si fa ruotare la ruota all'interno dell'anello mantenendola a contatto
- la matita traccia così una curva...

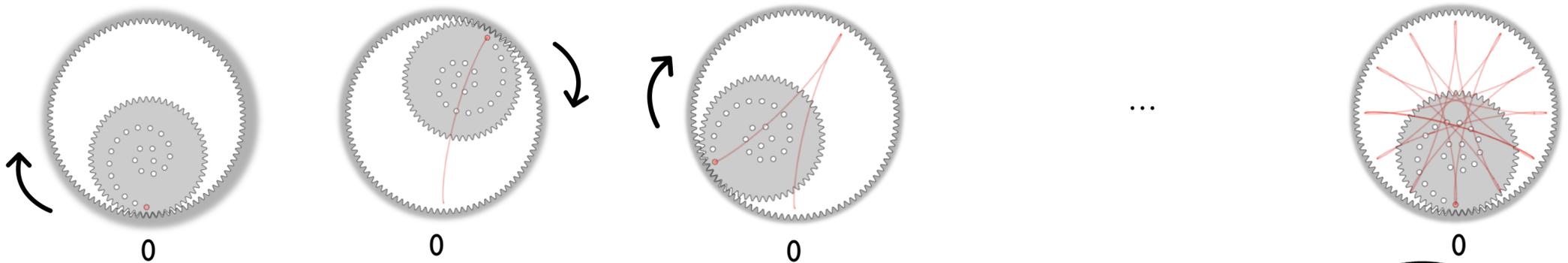
CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria



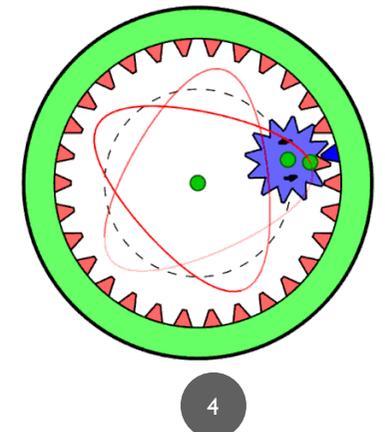
LO SPIROGRAFO

COME LO FA

$$A=96 \quad R=56$$



- Dopo una rotazione della ruota su se stessa, otteniamo I «petalo» della curva
- Quando il **dente** della ruota interna con cui si è partiti dal punto 0 torna al punto 0 dell'anello esterno, la curva si chiude
- Questo indipendentemente da quale foro scelgo e da dove parto, avviene **sempre**

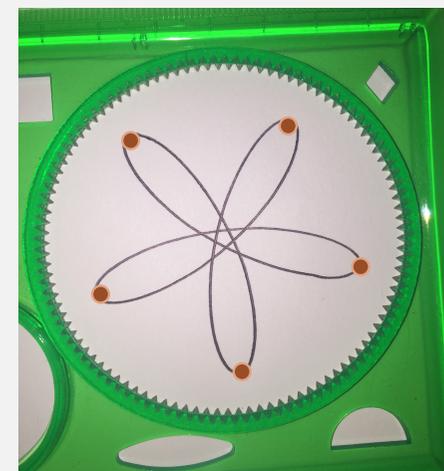


LA MATEMATICA DELLO SPIROGRAFO

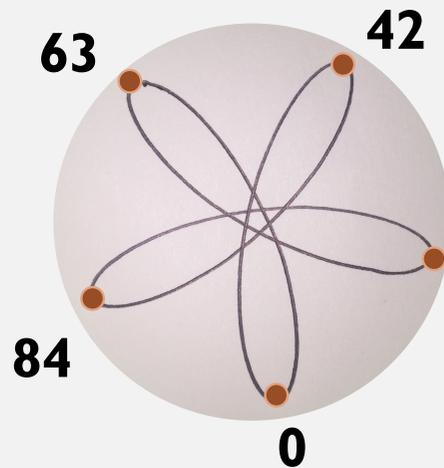
$$A=105 \quad R=63$$



....



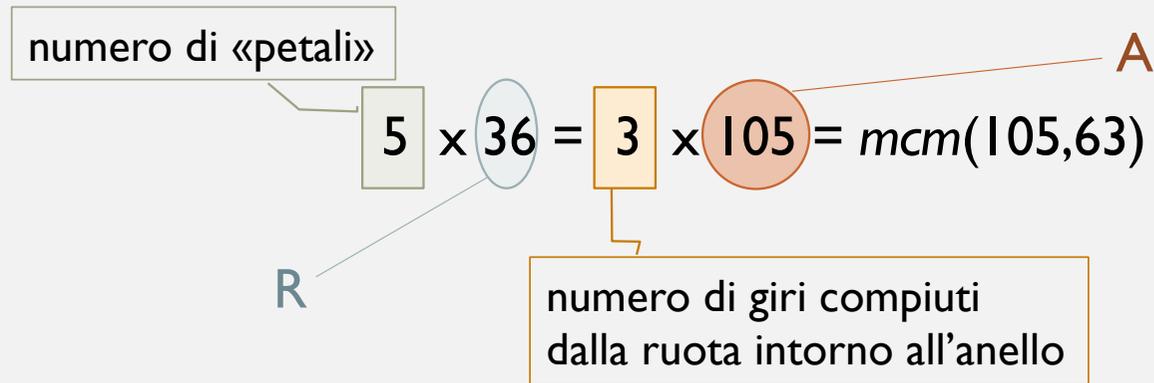
$$A=105 \quad R=63$$



$$21 = (63+63) \bmod 105$$

$$126 = 105 + 21$$

Come si muove	Cosa osservo	Come matematizzo
la ruota gira su se stessa 5 volte prima di ritornare al punto di partenza	la figura ha 5 «petali»	$\begin{array}{c} 5 \times 63 \\ = \\ 3 \times 105 \end{array}$
la ruota compie 3 rotazioni intorno all'anello per chiudere la curva	la curva si chiude quando la somma dei dentini della ruota diventa un <u>multiplo</u> del numero di dentini dell'anello	
	le «estremità» si trovano tra loro a distanza 21 dentini le une dalle altre	$MCD(105,63)=21$

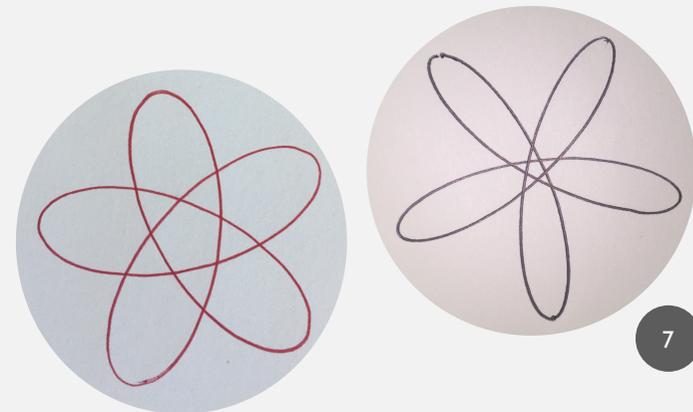


Allora, in generale:

$$\frac{mcm(A,R)}{R} = \text{numero di petali}$$

$$\frac{mcm(A,R)}{A} = \text{numero di giri compiuti dalla ruota intorno all'anello}$$

- Si può modellizzare lo spirografo con un sistema di aritmetica modulare
- mcm e MCD
- Varianti e invarianti



OBIETTIVI DIDATTICI

- utilizzare lo spirografo come strumento matematico
- dare senso al movimento delle sue parti per comprendere, interpretare e prevedere il tipo di curve che disegna
- introdurre l'idea di *mcm* tramite l'uso dello spirografo

GLI ATTORI

- 24 alunni della classe 5F (I. C. Chieri III)

METODOLOGIA

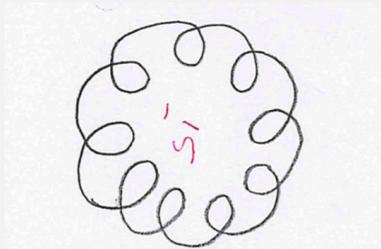
- attività di gruppo (3 studenti) in modalità laboratoriale, alternate a discussioni collettive guidate dal ricercatore e/o dall'insegnante della classe
- schede di lavoro e attività «destrutturate» di esplorazione
- 5 incontri (4 di 2 ore; 1 di 4 ore) nel periodo maggio-giugno 2019, nelle ore curricolari di matematica

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria



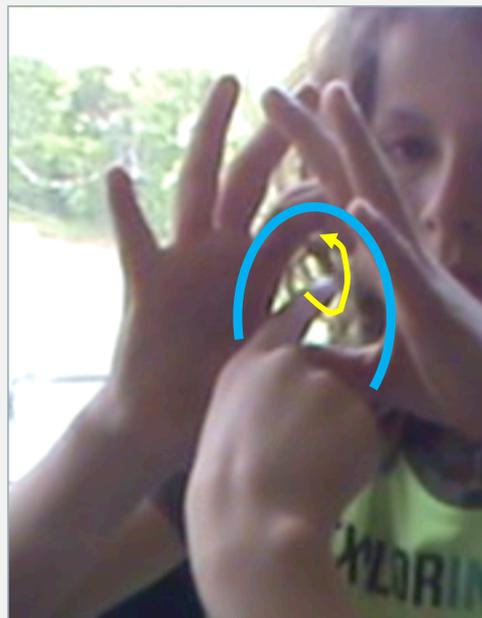


- Presentazione dello strumento: in breve, come è fatto e come funziona
- Attività 1 (in gruppo)
IMMAGINA CHE COSA DISEGNA LO SPIROGRAFO (senza utilizzarlo!)



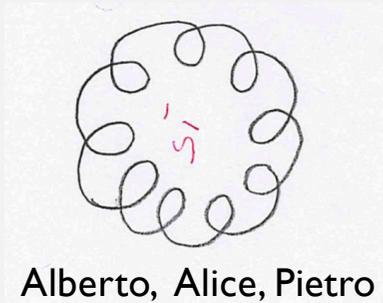
Alberto, Alice, Pietro

«Perché secondo me,
prima va vicino, poi va
lontano, poi va vicino...»

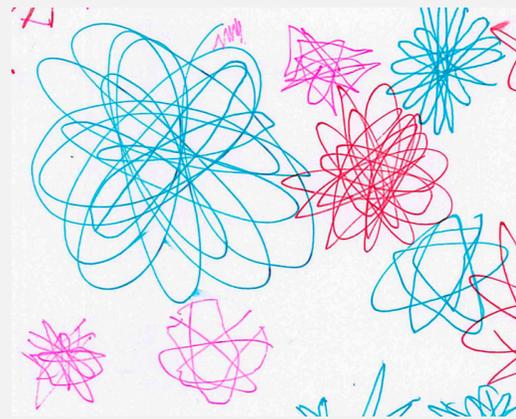


1°

- Presentazione dello strumento: in breve, come è fatto e come funziona
- **Attività 1 (in gruppo)**
IMMAGINA CHE COSA DISEGNA LO SPIROGRAFO (senza utilizzarlo!)

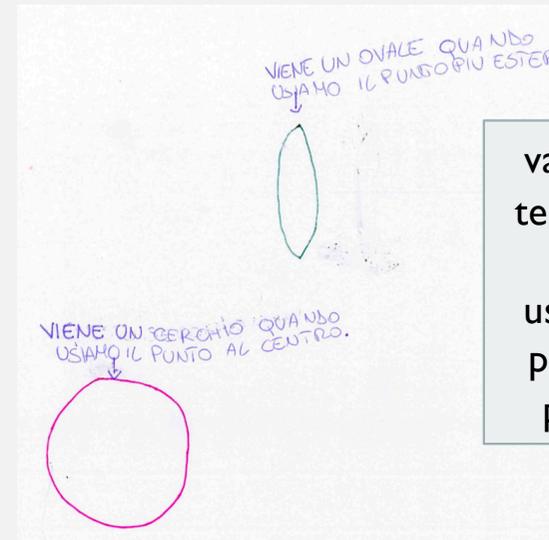


Alberto, Alice, Pietro



Alessandro, Darius, Luca

grande numero di «punte» e auto intersezioni della curva



Martina, Carola, Eleonora

variazioni “sul tema”: la figura cambia se usiamo il foro più interno o più esterno

«Perché secondo me, prima va vicino, poi va lontano, poi va vicino...»

1°

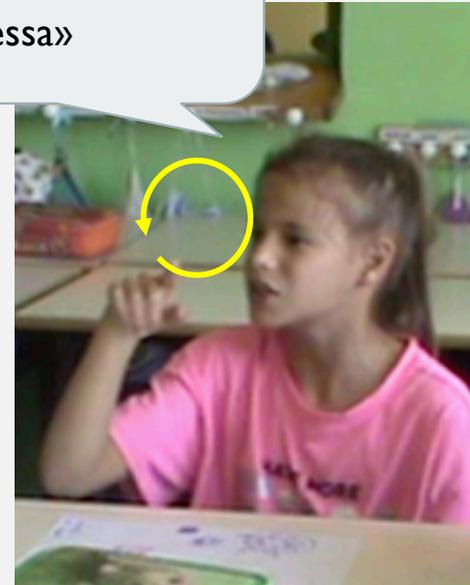
- Discussione collettiva



Darius

INTUIZIONE:
Movimento del foro della
rotella (e quindi della curva)
alternativamente verso il
bordo e verso il centro
dell'anello

«Mentre gira intorno alla
ruota, gira anche su
stessa»



Sofia



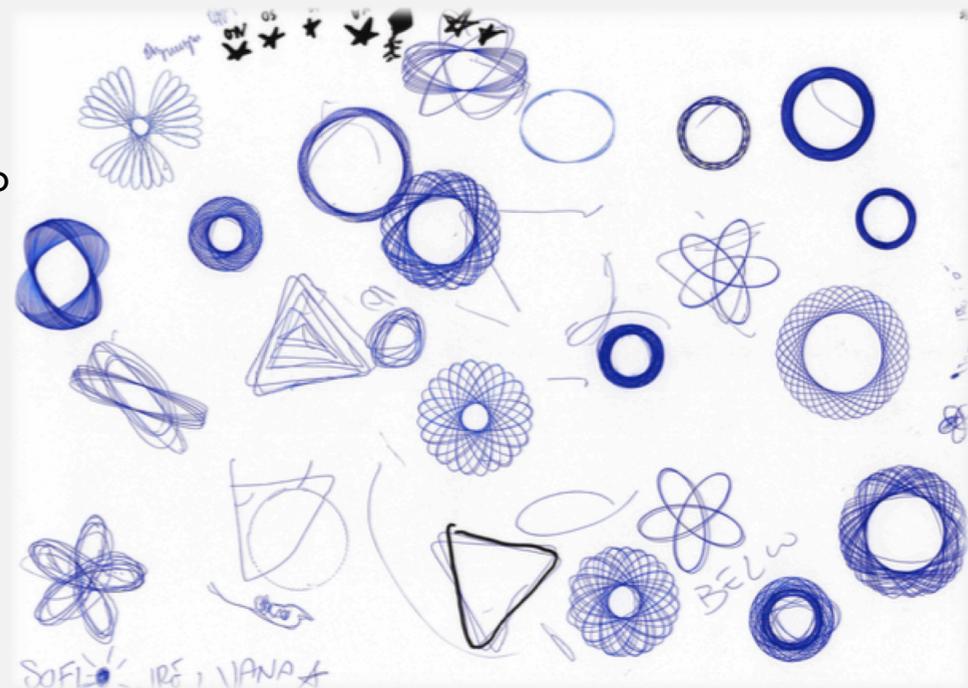


- Attività 2 (in gruppo)

PROVA A USARE LO SPIROGRAFO

Esplorazione libera su fogli A3

- prendere dimestichezza con lo strumento
- verificare le precedenti congetture, nello specifico se le curve ottenute hanno la forma di quelle attese o come sono diverse da queste
- osservare prime relazioni tra gli elementi e proprietà delle curve



Sofia, Irene, Vana



- Discussione collettiva

Che cosa avete scoperto utilizzando lo spirografo rispetto a quanto pensavate prima?

Alessandro

«Se tu usi il buchino più esterno ti verrà più liscio»

«Per ogni punto che prendevamo la forma veniva diversa»

Rebecca

- Compiono le prime congetture sulla scelta di una stessa combinazione ruota-anello con un foro diverso



- Attività 3 (in gruppo)

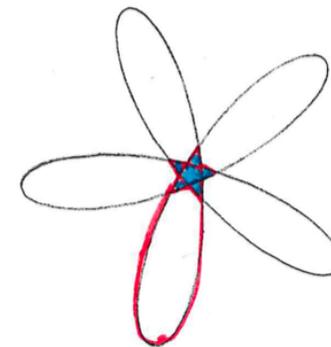
Scheda di lavoro: **IL DISEGNO DI EMMA**

- Trovare la combinazione R,A
- Scegliere il foro da utilizzare per creare proprio quella figura

Dalla discussione finale:

- necessità di un linguaggio condiviso
- numero di «petali» dipende dalla coppia di ingranaggi
- altri aspetti che permettono di confrontare le curve (ad esempio, la stella centrale)

Emma ha fatto questo disegno usando lo spirografo:



Come ha fatto?
Riesci a farlo uguale anche tu? Spiega in che modo.

2°

- Discussione collettiva
Ricapitoliamo: Che cosa fa lo spirografo?
- Attività 4

«Mi piacerebbe fare una forma a fiore con otto punte, otto petali [...] Lo spirografo che abbiamo ci fa disegnare, ci permette di fare un fiore a otto punte? Quello a cinque so che ci permette di farlo...»

- Cambiare la combinazione R,A

2°

- Discussione collettiva
Ricapitoliamo: Che cosa fa lo spirografo?
- Attività 4

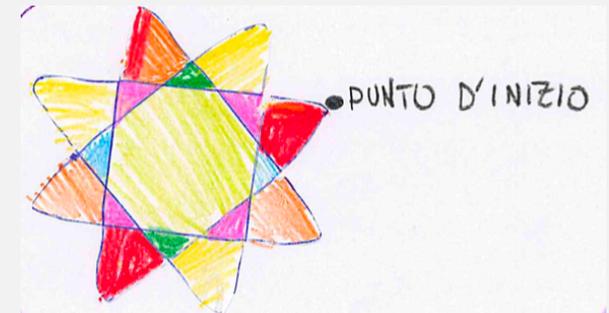
«Mi piacerebbe fare una forma a fiore con otto punte, otto petali [...] Lo spirografo che abbiamo ci fa disegnare, ci permette di fare un fiore a otto punte? Quello a cinque so che ci permette di farlo...»

DE USO LA STESSA ROTELLA NELLO STESSO ANELLO
MA CON BUCHI DIVERSI VIENE LA STESSA FIGURA
MA IN MODI CONGRUENTI (LE PUNTE SONO PIÙ SCHIACCIATE O
PIÙ APPUNTE), PER FARE LA FIGURA CON 8 PUNTE
BISOGNO FARE 3 GIRI DI ROTELLA DENTRO L'ANELLO
E SE VUOI FARE UNA FIGURA A PIÙ PUNTE BISOGNA
FARE PIÙ GIRI, PER ESEMPIO PRENDERE LA ROTELLA
MEDIA NELL'ANELLO GRANDE CON IL 3° BUCO.
PER VENGONO PIÙ UNITE QUINDI OCCUPANO MENO
SPAZIO E C'È NE STANNO DI PIÙ

Irene, Sofia, Vana

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria

Lorenzo, Francesco, Tommaso

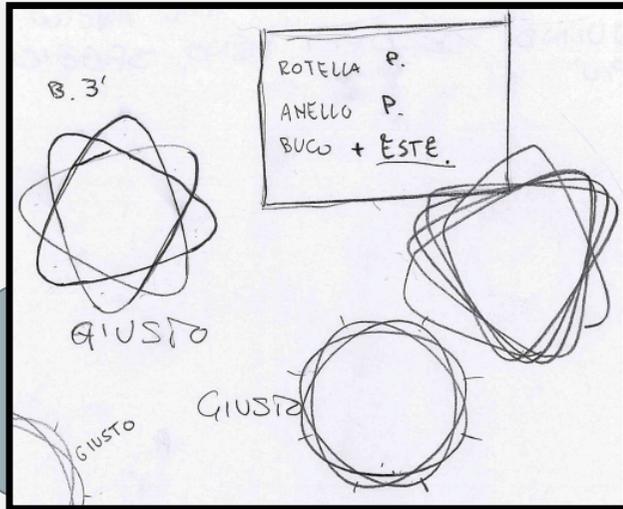


- Stessa combinazione = stesso numero di petali
- Entrano in gioco nuovi "numeri":
 - il numero di rotazioni della rotella su se stessa
 - il numero di «giri» intorno all'anello



Lucia, Linda, Matilde

2°



spirografo?

con otto punte, otto petali [...]

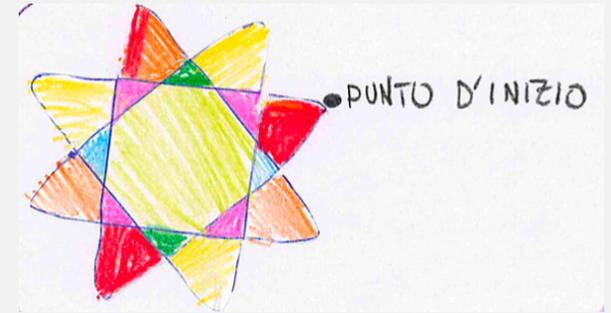
fare, ci permette di fare un fiore a otto punte?
a farlo...»

SE USO LE STESSA ROTELLA NELLO STESSO ANELLO
MA CON BUCI DIVERSI VIENE LA STESSA FIGURA
MA IN MODI CONGRUENTI (LE PUNTE SONO PIU' SCHIACCIATE O
PIU' APPUNTE), PER FARE LA FIGURA CON 8 PUNTE
BISOGNO FARE 3 GIRI DI ROTELLA DENTRO L'ANELLO
E SE VOI FARE UNA FIGURA A PIU' PUNTE BISOGNA
FARE PIU' GIRI, PER ESEMPIO PRENDERE LA ROTELLA
MEDIA NELL'ANELLO GRANDE CON IL 3° BUCO.
PER VENGONO PIU' UNITE QUINDI OCCUPANO MENO
SPAZIO E C'E' NE STANNO DI PIU'

Irene, Sofia, Vana

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria

Lorenzo, Francesco, Tommaso



Lucia, Linda, Matilde

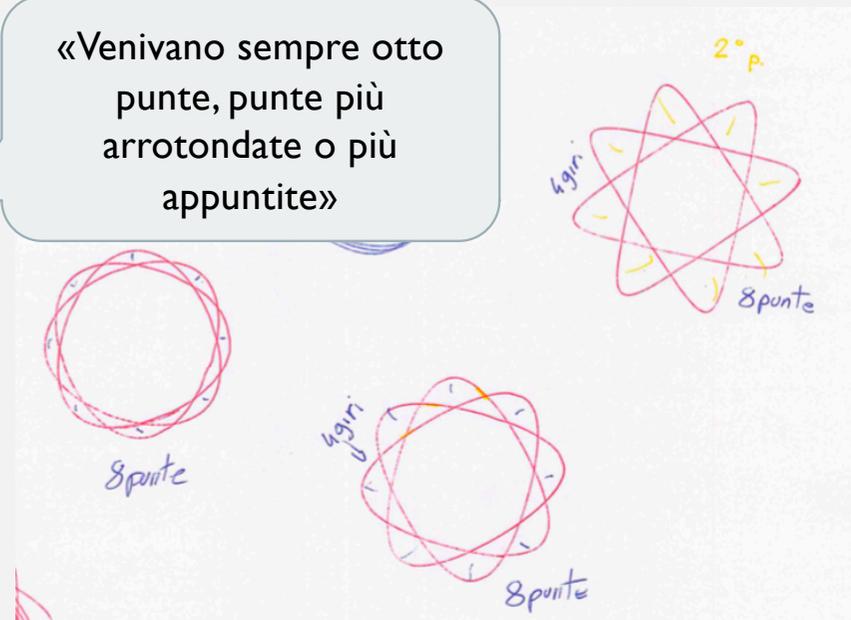
- Stessa combinazione = stesso numero di petali
- Entrano in gioco nuovi «numeri»:
 - il numero di rotazioni della rotella su se stessa
 - il numero di «giri» intorno all'anello

3°

- Discussione collettiva

Sofia

«Venivano sempre otto punte, punte più arrotondate o più appuntite»



Pietro

«Dipende da quale rotella e anello»

- Discussione collettiva

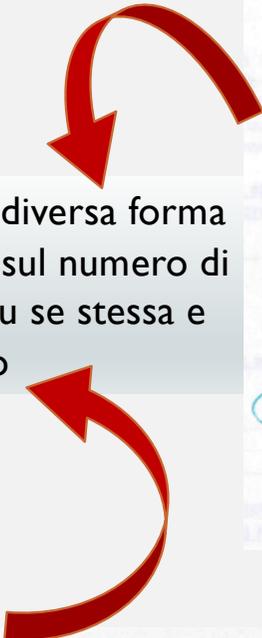
Dalle puntate precedenti...Poiché si è lavorato specificatamente su 5 e 8 punte, l'attenzione si sposta sull'indagare se si può sempre dire che:

«Se scelgo una rotella e scelgo di farla girare dentro uno specifico anello, posso dire che mi verrà fuori uno specifico numero di petali, indipendentemente da come sarà fatto il disegno?»

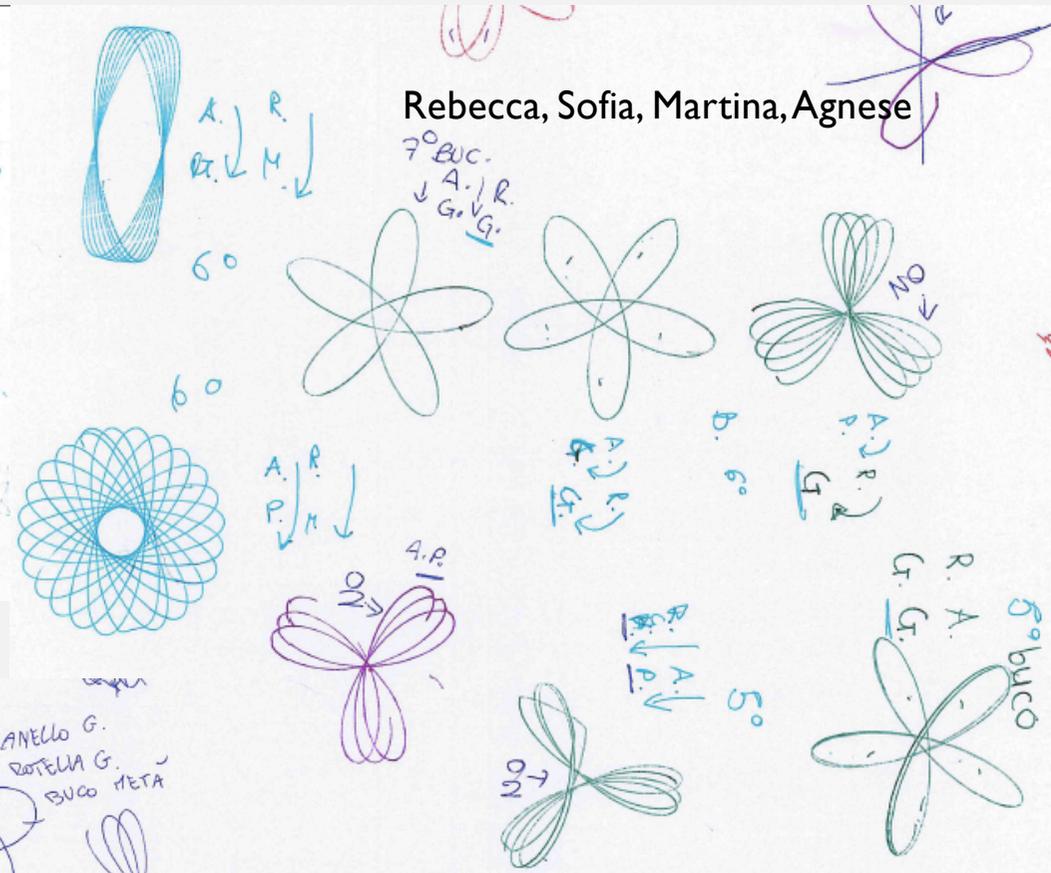
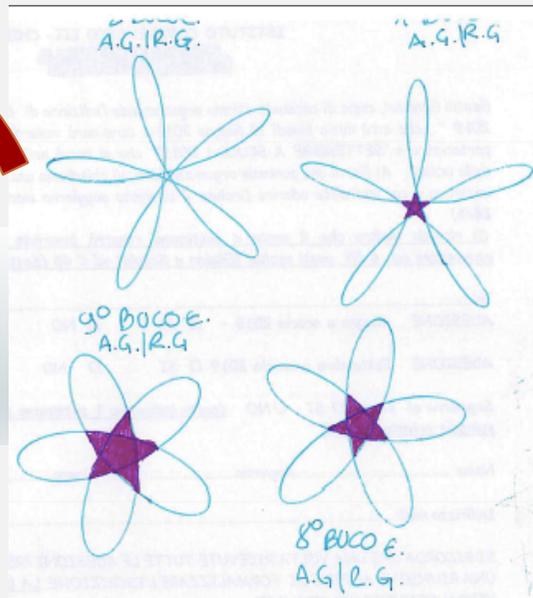
- Attività 5

Esplorazione di questo problema utilizzando lo strumento
(lavoro di gruppo su foglio A3)

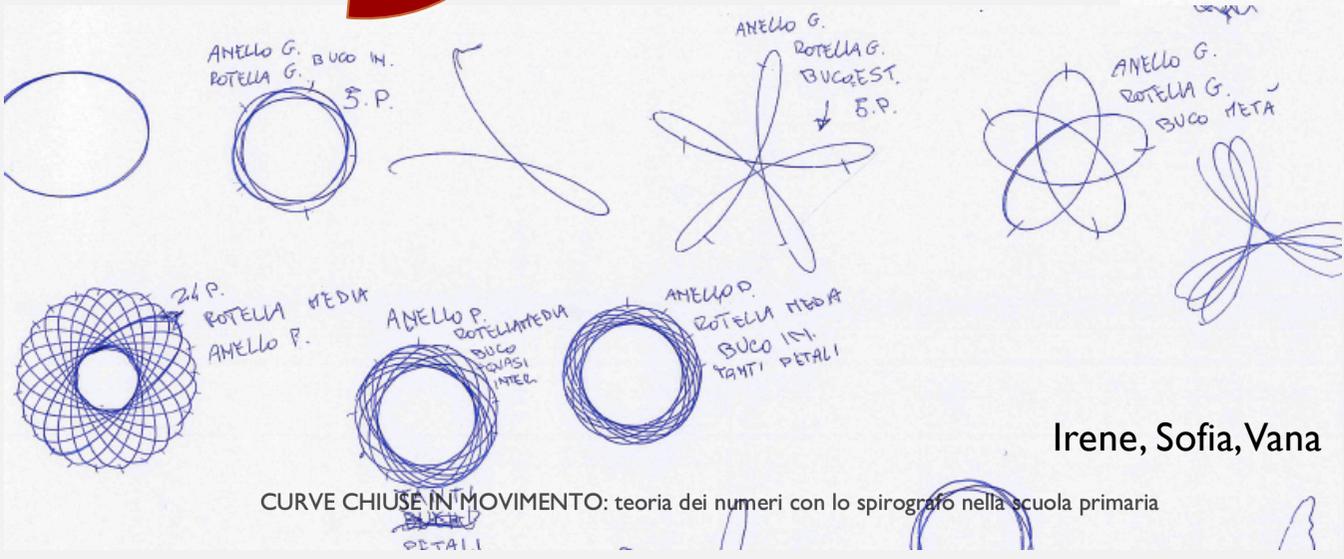
3°



- Diverso buco = diversa forma
- Prime intuizioni sul numero di giri della ruota su se stessa e intorno all'anello



Rebecca, Sofia, Martina, Agnese



Irene, Sofia, Vana

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria

1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8

Alberto, Alice, Pietro

- **Attività 6 (in classe a gruppi misti di 4 bambini)**

SPIEGA COME FA LO SPIROGRAFO A DISEGNARE CURVE CHE SI CHIUDONO

56 B.8 R.G. = Buco 8, Rotella grande e 5 giri su se'



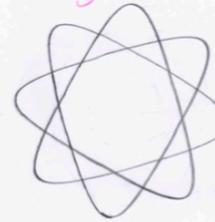
LA ROTELLA IN QUESTO CASO GRANDE COMPIE 5 GIRI SU SE STESSA E 3 GIRI NELL' ANELLO, 3 GIRI CHE SERVONO PER CHIUDERE LA FIGURA; POTREI ANCORA ANDARE AVANTI CON I GIRI MA LA FIGURA VERREBBE SOLAMENTE RICALCATA.

- Esplicitare il legame tra i giri della ruota e le combinazioni che danno curve chiuse

Alberto, Alice, Linda, Matilde

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO: teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria

Figura n°1



Anello piccolo, rotella piccola, 3° buco esterno. Come si può vedere in questa figura, ci sono 8 "petali" che corrispondono a i giri della rotella piccola su se stessa.

Carola, Eleonora, Irene, Martina

Secondo noi: ogni volta che la rotella fa un giro si forma un petalo, perché la rotella e i petali che devi fare "lavorano insieme"; quindi la figura si chiude in base a quanti giri fa la rotella su se stessa.

- Attività 7 (in gruppo)

Scheda di lavoro: **RUOTE E DENTINI**

Nello spirografo che hai a disposizione, ci sono 3 ruote e 2 anelli.
Fai attenzione: l'anello più piccolo ha 96 dentini, il più grande 105 dentini.
La ruota piccola ha 36 dentini, la ruota grande ne ha 63.

Pensa ancora a un disegno con 5 petali o punte e a uno con 8 petali o punte.

In tutti e due i casi, spiega come fa lo spirografo a creare quei disegni e quanti giri la ruota fa dell'anello e quanti su se stessa.

- Esplicitare la relazione tra R e A e il numero di petali

5°

Dai protocolli...

Linda, Lucia, Matilde

Lo spirografo si basa su multipli di entrambi i numeri, che per esempio sono: $96 \times 3 = 288$ e $36 \times 8 = 288$
 288 è un multiplo di 96 e anche di 36.

$$\begin{array}{r} +1 \\ 96 \times \\ \hline 3 = \\ \hline 288 \end{array}$$

Alessandro, Darius, Luca

~~SONO MULTIPLI~~

SONO MULTIPLI
 COMUNI

LA ROTELLA PICCOLA TOCCA 315 DENTINI DELL'ANELLO GRANDE, FACENDO 8 GIRI SU SE STESSA.

$$\begin{array}{r} +1 \\ 96 \times \\ \hline 8 = \\ \hline 768 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1 \\ 105 \times \\ \hline 3 = \\ \hline 315 \end{array}$$

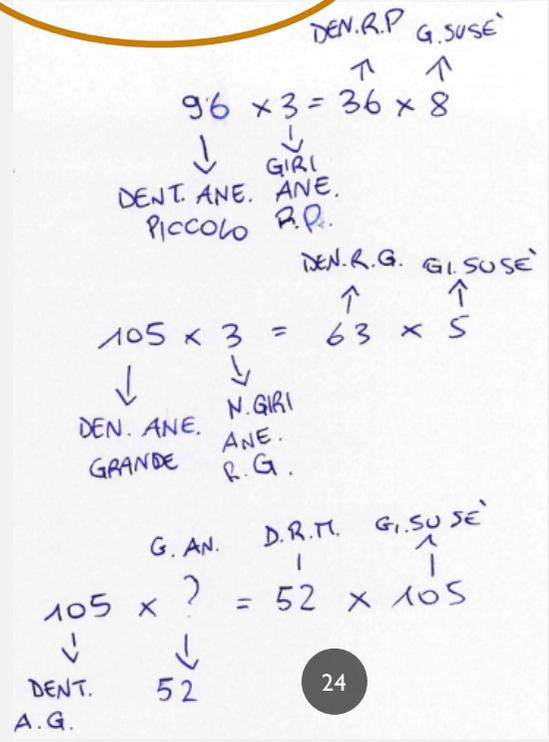
Irene, Sofia

BISOGNA TROVARE UN MULTIPLO DEI DENTINI DELLA ROTELLA CHE SIA ANCHE MULTIPLO DEI DENTINI DELL'ANELLO.



È tutto collegato da multipli.

Alberto, Alice, Pietro



francesca.ferrara@unito.it

giulia.ferrari@unito.it

ketty.savioli@gmail.com



IX CONVEGNO NAZIONALE DI DIDATTICA DELLA FISICA E DELLA
MATEMATICA

DI.FI.MA. 2019

MATEMATICA E FISICA NELLA CULTURA E NELLA SOCIETÀ

9-10-11 ottobre 2019

CURVE CHIUSE IN MOVIMENTO:

teoria dei numeri con lo spirografo
nella scuola primaria