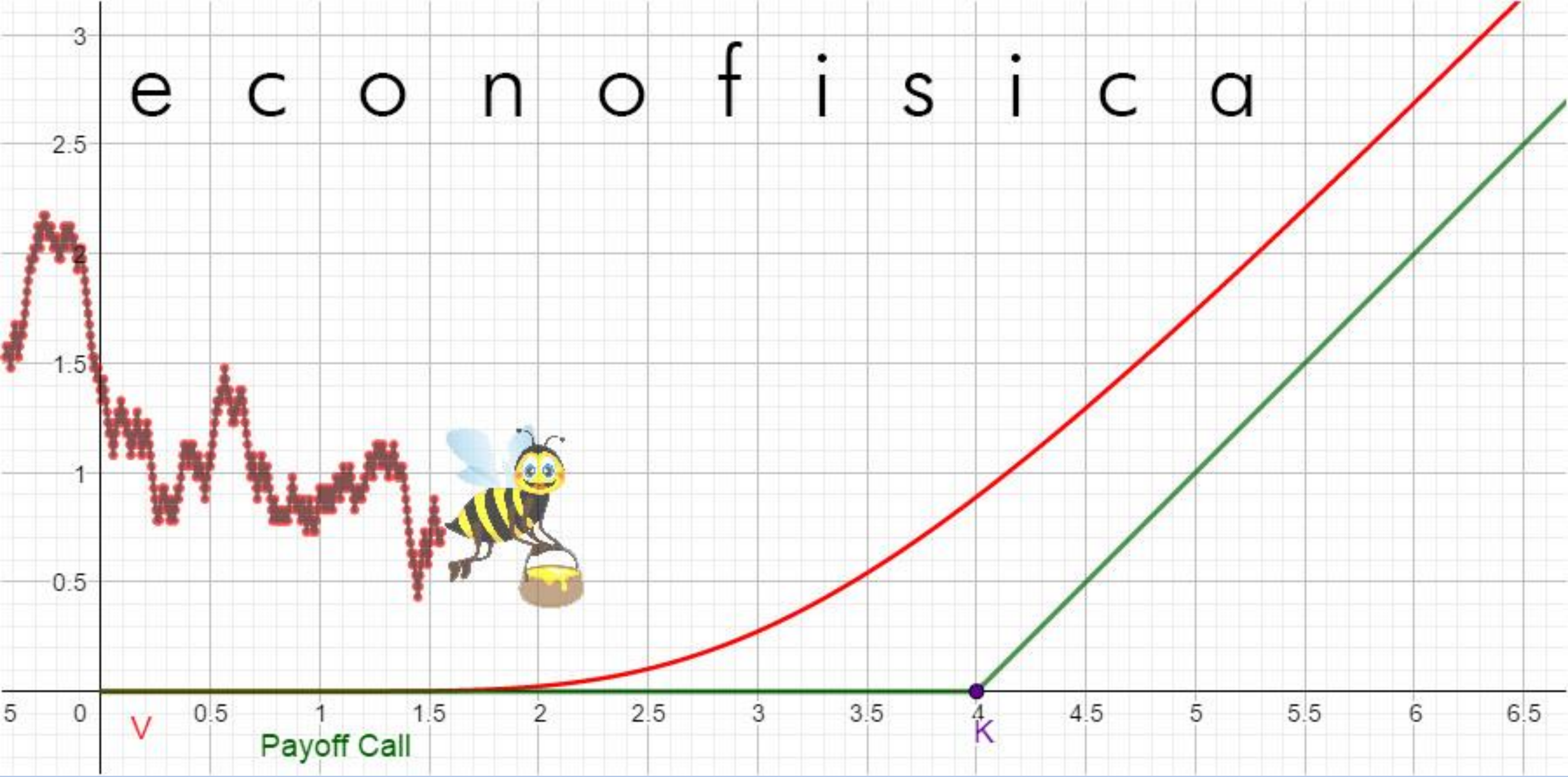
econofisica



Alberto Cena

Roberto Nucera

ITC Sommeiller - Torino

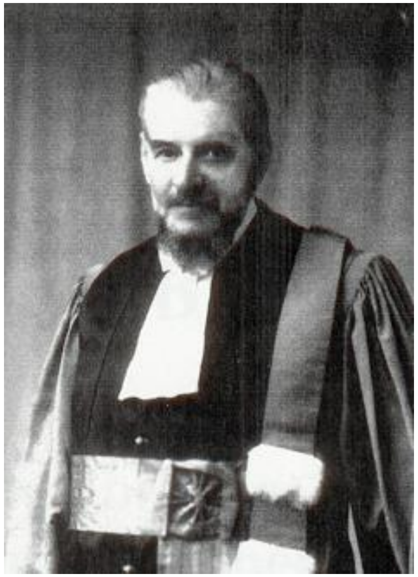
IX GeoGebra Italian Day

11 ottobre 2019

Economia + Fisica = Econofisica

Esploriamo con GeoGebra l'incontro tra due discipline

Econofisica, i semi



THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

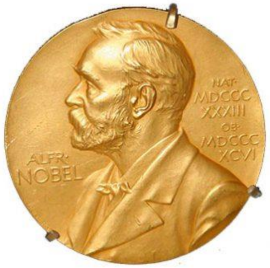
PAR M. L. BACHELIER.

BACHELIER
FINANCE
SOCIETY

… il Mercato, per propria natura, obbedisce a una sola legge che lo domina: la legge della probabilità

Louis Bachelier, 1900

Arrivano i Nobel



The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997

Photo from the Nobel Foundation archive.

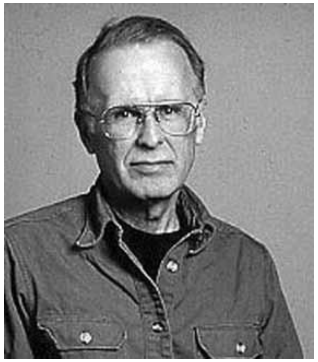
Robert C. Merton

Prize share: 1/2

Photo from the Nobel Foundation archive.

Myron S. Scholes

Prize share: 1/2

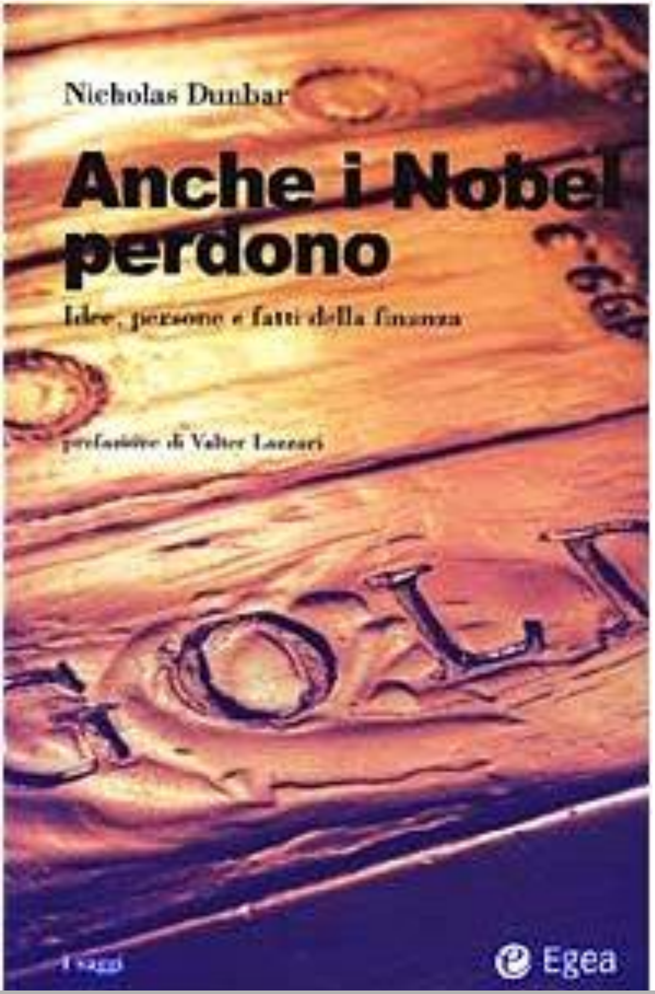


Fisher Black
(deceduto nel 1995)

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997 was awarded jointly to Robert C. Merton and Myron S. Scholes "for a new method to determine the value of derivatives."

https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1997/summary/

Anche i Nobel perdono



Nel settembre del 1998 fallisce Long Term Capital Management, un fondo speculativo creato nel 1994 da grandi nomi dell'Economia, tra cui Merton e Scholes.

Il crack spinge l'economia mondiale sull'orlo del baratro.

È la prima grande crisi finanziaria causata dai derivati. Dalla seconda, del 2008, non ne siamo ancora usciti oggi

Cosa sono questi diavoli di derivati?

Un derivato è un prodotto finanziario il cui valore a scadenza dipende dall'andamento di una attività sottostante. Il sottostante può essere un bene, una moneta, un tasso, un'azione,…

If a Swedish company has to pay 10 million dollars for a machine in six months, it runs the risk that the exchange rate will change. In order to protect itself against a future increase in the value of the dollar, the company can purchase an option with the right, but not the obligation, to buy dollars in six months at a predetermined price

https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1997/ceremony-speech/

L’esempio della cerimonia

L’amministratore di una società svedese sa che tra 6 mesi dovrà pagare 10 milioni di dollari per l’acquisto di un macchinario ad alta tecnologia. Oggi (8/10/2019) il tasso di cambio del Dollaro statunitense rispetto alla Corona svedese è

$$1\$ = 9.94587 \text{ SEK}$$

Con l’amministratore, guardi il grafico che rappresenta l’andamento del tasso di cambio negli ultimi 6 mesi.

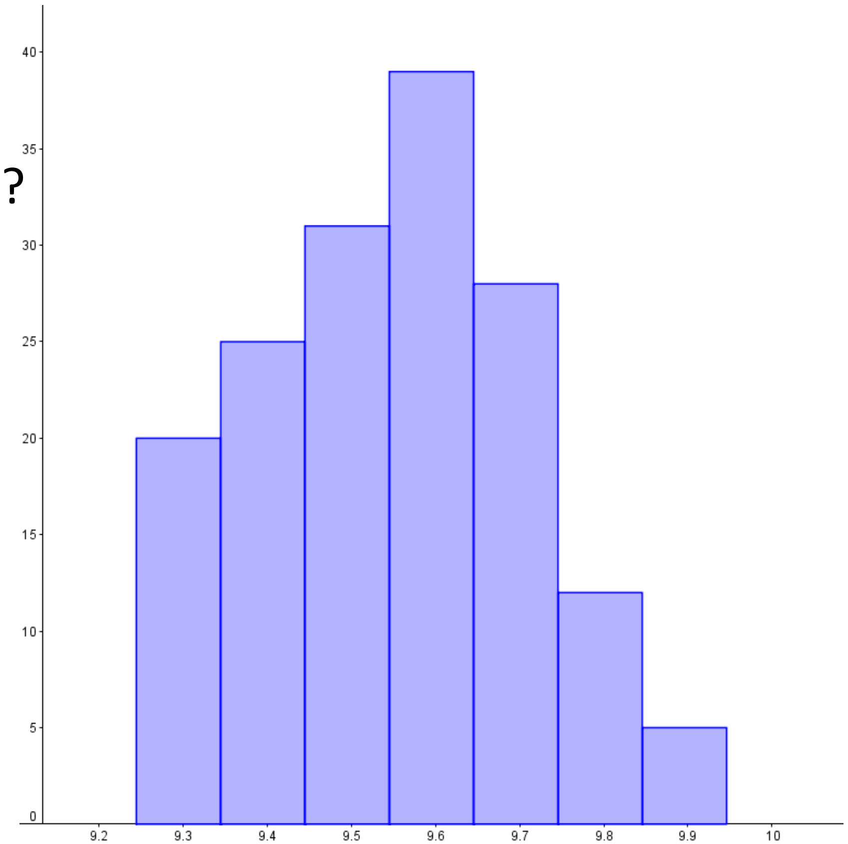
Quale sarà l’andamento del tasso di cambio nei prossimi sei mesi?
https://www.geogebra.org/m/nhrnxqf6

Alla ricerca di normalità

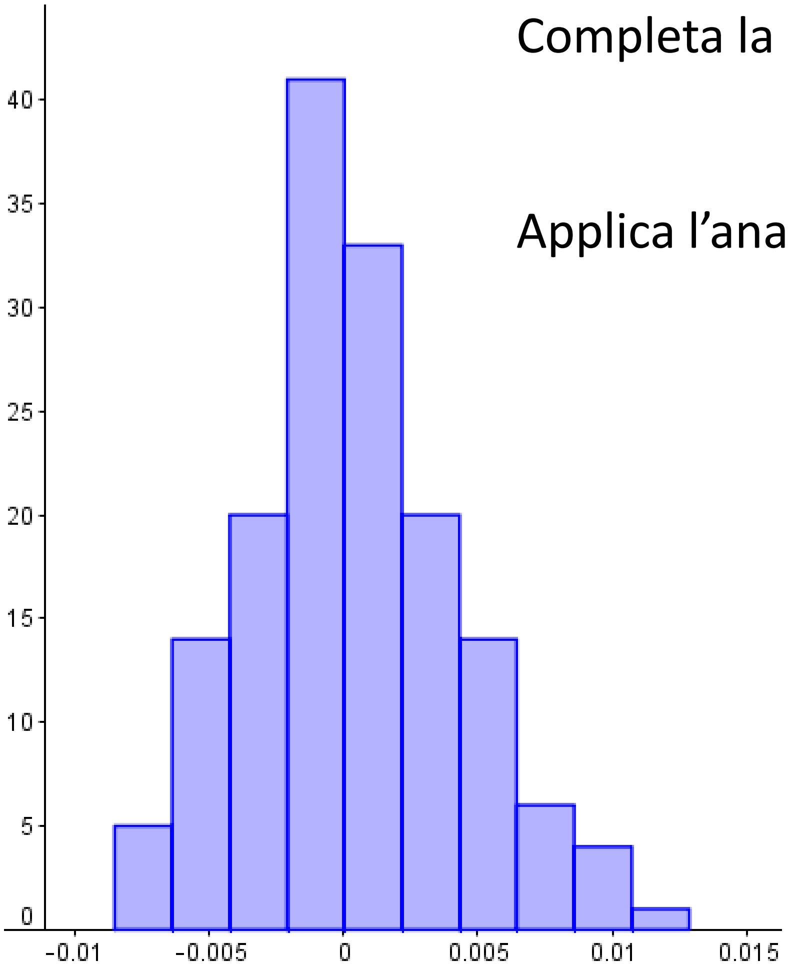
Apri il foglio https://www.geogebra.org/m/nhrnxqf6
Seleziona la colonna C dei tassi di cambio $/SEK
Applica il comando Analisi univariata

L'istogramma è simmetrico?
Una distribuzione normale si adatta ai dati?

n	160
Media	9.54836
σ	0.16148
s	0.16198
Σx	1527.73699
Σx²	14591.54884
Min	9.24434
Q1	9.42832
Mediana	9.55233
Q3	9.65516
Max	9.94587



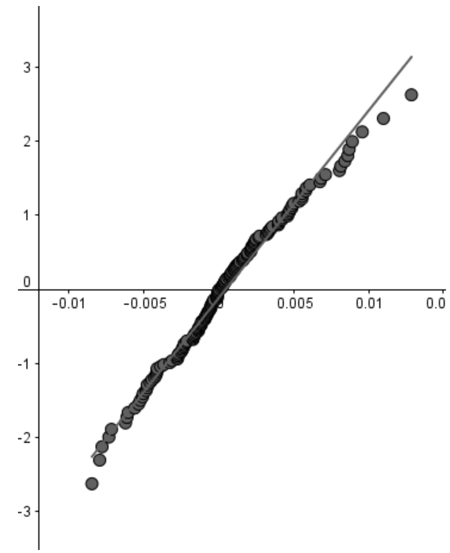
I ritorni



In finanza, si chiamano ritorni le variazioni relative.
Completa la colonna D con i ritorni della colonna C

$$D_i = \frac{C_i - C_{i-1}}{C_{i-1}}$$

Applica l'analisi univariata alla colonna dei ritorni



La normalità dei ritorni è una delle ipotesi (contestata!) del modello più semplice per descrivere l'andamento di un'attività finanziaria

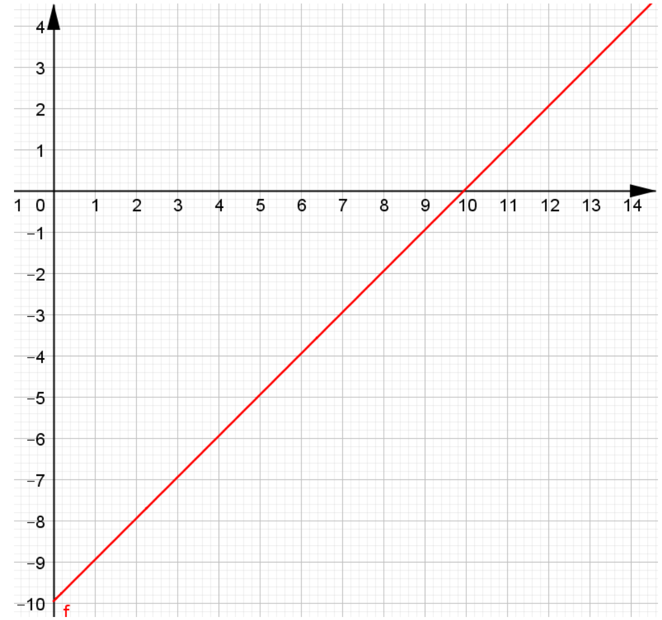
Copertura del rischio 1

L’amministratore vuole coprirsi dal rischio di cambio. Infatti teme che nei prossimi sei mesi cresca il valore del dollaro rispetto alla corona.
Si mette allora in contatto con la Banca Forward che propone il seguente contratto:

- la banca si impegna a consegnare 10 milioni di dollari tra sei mesi, al tasso di cambio $1\$ = 9.95\ \mathrm{SEK}$ fissato ora
- La società ha l’obbligo, tra sei mesi, di acquistare dalla banca 10 milioni di dollari al tasso stabilito ora

Quale funzione rappresenta il valore del contratto a scadenza?

f(x) = Se(x>0, x – 9.95)



Copertura del rischio 2

L'amministratore teme che nei prossimi sei mesi cresca il valore del dollaro, ma non ne è certo. Gli dispiacerebbe pagare 9.95 SEK per un dollaro se il suo valore risultasse inferiore, ad esempio scendesse a 9.9 SEK.
Si mette allora in contatto con la Banca Option che propone il seguente contratto:

- la banca si impegna a consegnare, se richiesti dalla società, 10 milioni di dollari tra sei mesi, al tasso di cambio $1\$ = 9.95\ \mathrm{SEK}$ fissato ora
- La società, tra sei mesi, può scegliere **se** acquistare o **non** acquistare dalla banca i 10 milioni di dollari al tasso stabilito ora

Quale funzione rappresenta il valore del contratto a scadenza?

f(x) = Se(x>9.95, x – 9.95, Se(x>0, 0))

Opzioni plain vanilla

Una opzione di acquisto (call) è un contratto che dà al possessore il diritto ma non l’obbligo di acquistare un titolo sottostante a un prezzo fissato (strike o prezzo di esercizio) in una data futura

Una opzione di vendita (put) è un contratto che dà al possessore il diritto ma non l’obbligo di vendere un titolo sottostante a un prezzo fissato (strike o prezzo di esercizio) in una data futura

Quale premio si deve pagare per sottoscrivere una call o una put?

La funzione payoff

La funzione payoff esprime il valore di una opzione in dipendenza del sottostante alla scadenza del contratto

Call con strike K

$$C(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } 0 \leq x < K \\ x - K \text{ se } x \geq K \end{cases}$$

equivalentemente

$$C(x) = \max(x - K, 0)$$

Costruite uno slider k

Definite la funzione

C(x) = Se(0 ≤ x < k, 0, Se(x ≥ k, x-k))

La funzione payoff

Put con strike K

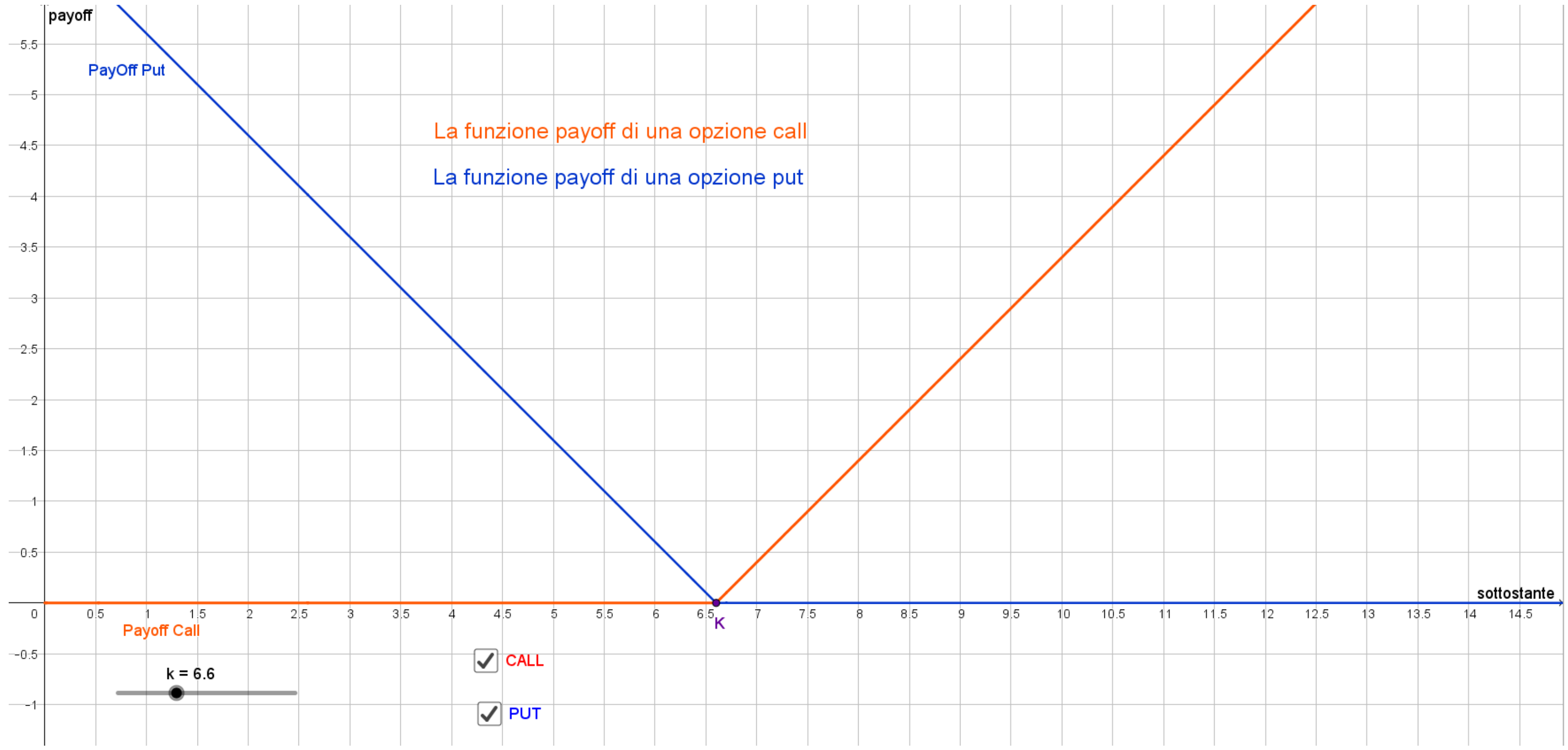
$$P(x) = \begin{cases} K - x \ \text{ se } 0 \leq x < K \\ 0 \text{ se } x \geq K \end{cases}$$

equivalentemente

$$P(x) = \max(k - x, 0)$$

P(x) = Se(0 ≤ x<k, k - x, Se(x ≥ k, 0))

Se possedessi una call e una put con lo stesso strike?



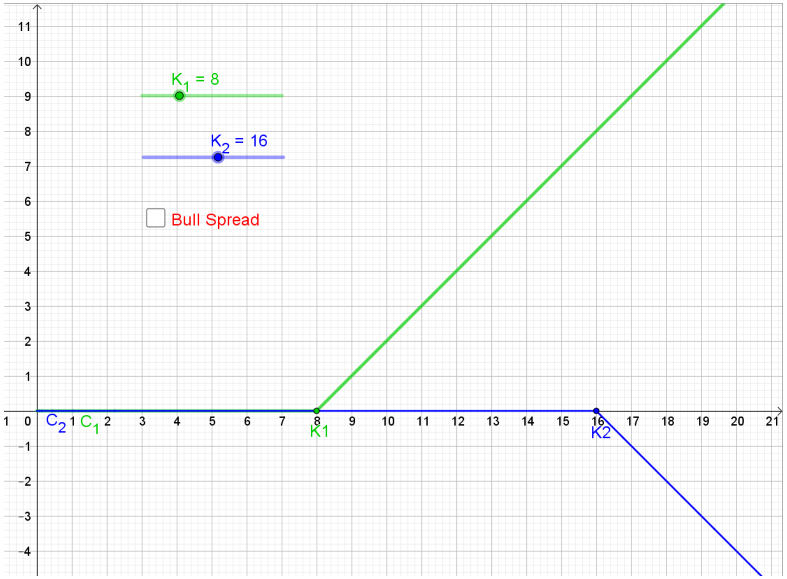
https://www.geogebra.org/m/vakuq9ty

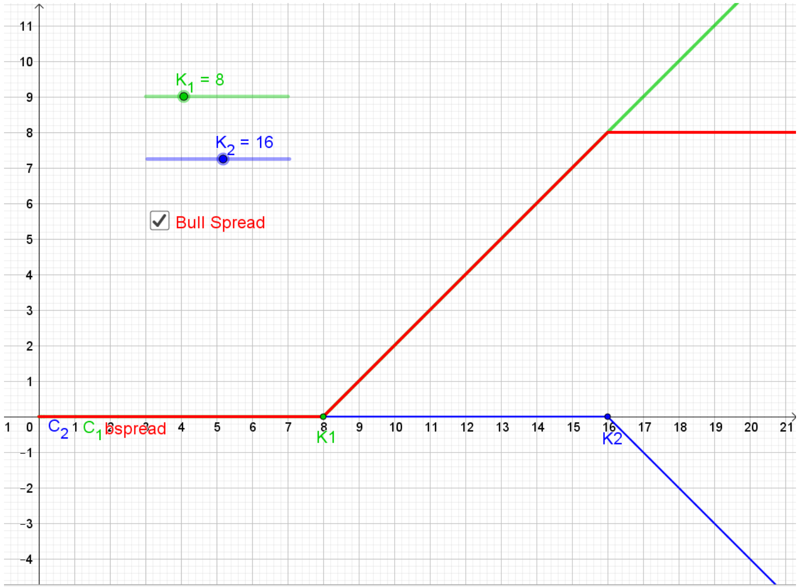
Ingegneria finanziaria

Uno speculatore ha una posizione lunga (compra il sottostante) su una call con strike K_1 e una posizione corta (vende il sottostante) su una call con strike K_2. Le due call sono scritte sullo stesso sottostante, con la stessa scadenza e $K_1 < K_2$.

Questa combinazione si chiama bull spread. In quali casi lo speculatore ha benefici da un bull spread?

https://www.geogebra.org/m/crnbztje



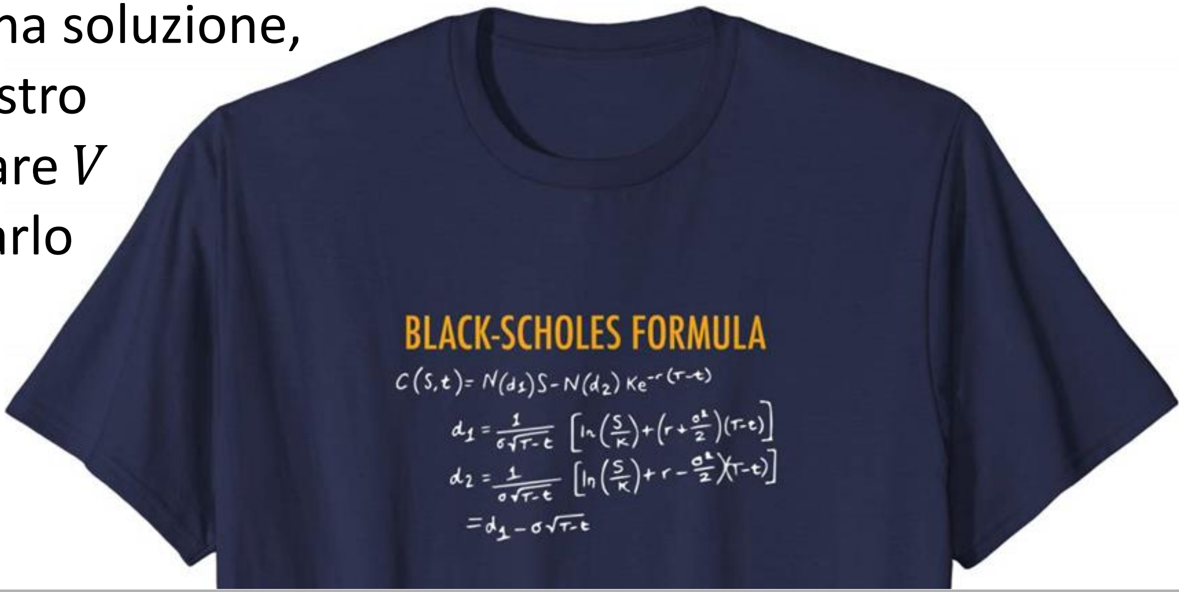


L’equazione di Black e Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

$V(S,t)$ è il valore dell’opzione in funzione di
S : prezzo del sottostante
t : tempo

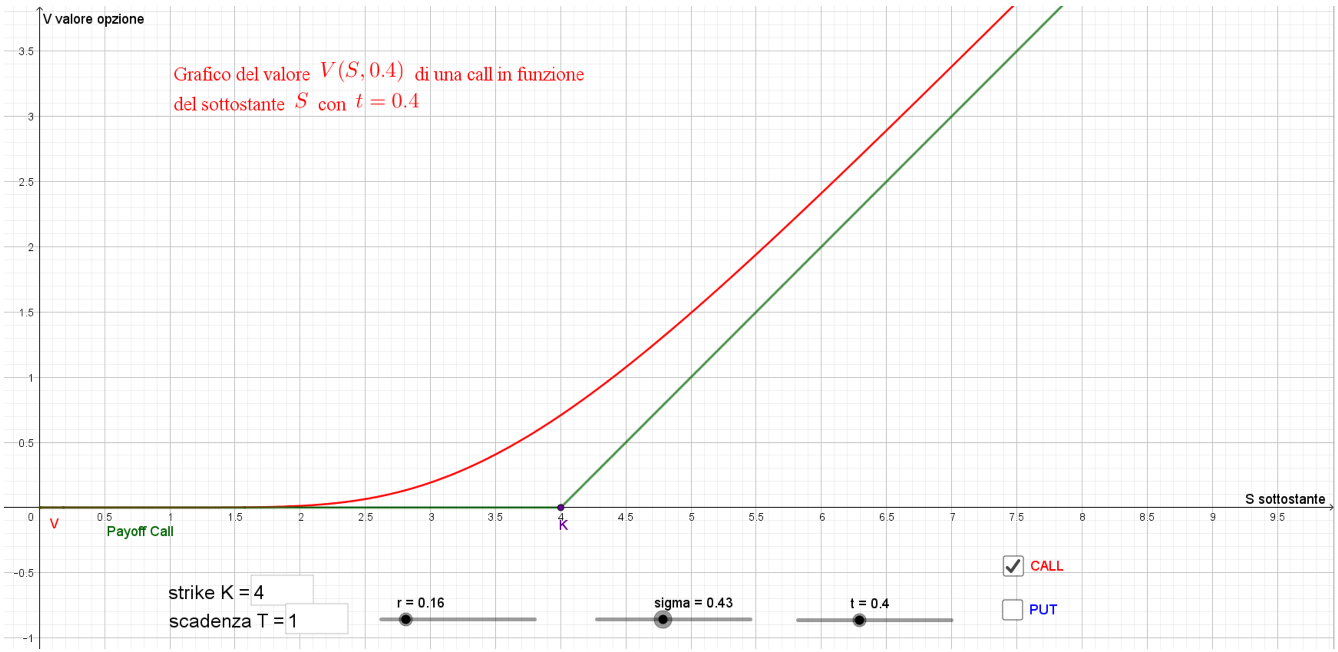
L’equazione ammette una soluzione, che non trattiamo: il nostro obbiettivo è approssimare V con il metodo Monte Carlo



Il valore $V(S,t)$ di una opzione

Apri https://www.geogebra.org/m/ub4cpzvz

Puoi vedere che, fissato il valore di t, V è una funzione di S monotona crescente. Infatti, più S è elevato più è probabile che S sarà maggiore del prezzo di esercizio K alla data di scadenza.



Fai variare il tempo t. Che cosa osservi?

Fai variare la volatilità σ. Che cosa osservi?

L’evoluzione del sottostante

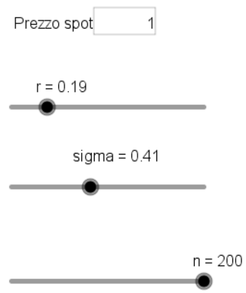
Nel modello di Black-Merton-Scholes l’evoluzione del sottostante $S(t)$ in funzione del tempo è descritta da un moto geometrico browniano.

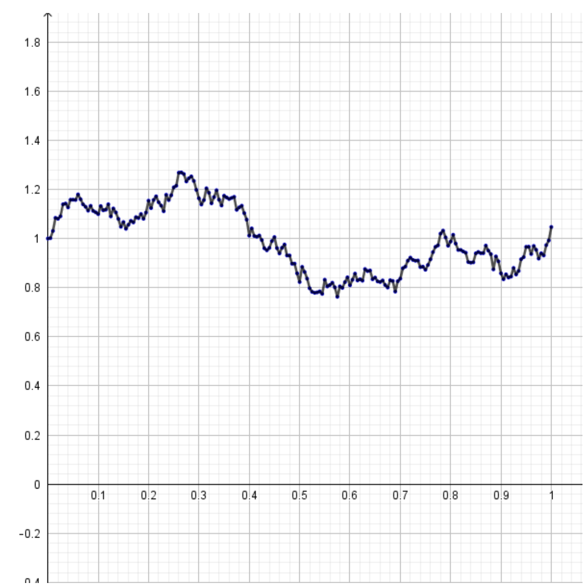
La discretizzazione del valore $S(t)$ del sottostante è:

$$S(t_{i+1}) = (1 + rdt)S(t_i) + \sigma\sqrt{dt}Z_iS(t_i)$$

con $Z_i \sim N(0,1)$ e $dt = t_{i+1} - t_i$.

r è il rendimento del titolo (drift), se fosse deterministico, σ è la deviazione standard (volatilità)





https://www.geogebra.org/m/vn2mfxsf

Simulare le traiettorie

1) Definisci tre slider che chiami S0, r, sigma, n
   S0 è il valore iniziale
   r è il drift (0 ≤ r ≤ 1)
   sigma è la volatilità (0 ≤ sigma ≤ 1)
   n è il numero di partizioni dell'intervallo unitario.
   Il numero n è intero, l'intervallo di tempo è dt = 1/n

2) Definisci la successione $S(t_i)$ ricorsivamente
   l1 = IterazioneLista((1 + r 1/n)S + sigma sqrt(1/n) CasualeNormale(0, 1)) S, S, {S0}, n)

3) Definisci la successione di punti

   l2 = Successione(((i - 1)/n, l1(i)), i, 1, n + 1)

4) Definisci la curva spezzata

   traiettoria = Spezzata(l2)

https://www.geogebra.org/m/vn2mfxsf

Il Metodo Monte Carlo

Apri l'app https://www.geogebra.org/m/bdsmqm6p
Nella cella A2 scrivi S0
Nella cella B2 scrivi il primo passo della dicretizzazione

A2 (1 + r 1/10 + sigma CasualeNormale(0, 1) sqrt(1/10))

Trascina la cella fino a K2 per ottenere la simulazione di una traiettoria
In L2 scrivi la funzione payoff

Max(K2 - strike, 0)

Seleziona la riga da A2 a L2 e trascina la selezione fino alla riga 251. Ottieni così 250 traiettorie simulate
Nella cella M2 calcola la media dei payoff ottenuti e attualizza questo valore

e^(-r) media(L2: L251)

media(L2:L251) approssima il valore atteso del Payoff. Attualizzando (in capitalizzazione continua) questo valore ottieni una approssimazione del prezzo della call

https://www.geogebra.org/m/ahmbhny4