Curve chiuse in movimento: Teoria dei numeri con lo spirografo nella scuola primaria

F. Ferrara[1], G. Ferrari[1], K. Savioli[2]
[1]Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università degli Studi di Torino
[2]Istituto Comprensivo Chieri III, Torino

giulia.ferrari@unito.it

In questa comunicazione presentiamo un'esperienza didattica che è stata progettata e sperimentata in una classe quinta della scuola primaria a partire dall'utilizzo di uno strumento di disegno: lo spirografo. Lo spirografo, di cui in genere si fa esperienza nei primi anni di vita e della scuola primaria in situazioni giocose, è composto da un insieme di ruote e anelli che vengono combinati grazie ai loro bordi dentati e permettono di ottenere disegni esteticamente affascinanti. Ogni ruota possiede dei fori, posizionati a distanza diversa dal suo centro, dunque lungo una spirale. Inserita la ruota all'interno di un anello, e inserita la punta di una matita o di una penna in un foro, si può mettere in movimento la ruota facendola rotolare internamente all'anello. I disegni generati dalla punta della penna al movimento della ruota si chiudono quando la ruota, dopo un certo numero di giri, torna alla sua posizione esatta di partenza. Per quanto diversi tra loro, questi disegni sono sempre *curve chiuse*.
Possiamo quindi chiederci: Come fa lo spirografo a disegnare sempre curve chiuse?
Cambiando poi la posizione della matita, ovvero scegliendo un altro foro, ci accorgiamo che il disegno che abbiamo creato varia leggermente, ma non cambia il numero di "punte" (a volte simili a dei "petali" di un fiore, per la loro forma e per la disposizione) che caratterizza il diagramma. Come mai? Che cosa accade poi se scegliamo configurazioni di ruote e anelli sempre diverse? Come cambia il diagramma?
Queste sono alcune delle domande che hanno guidato la progettazione delle attività didattiche che sono state proposte ai bambini, volte all'esplorazione dello strumento e delle relazioni matematiche che determinano il suo funzionamento e la forma delle sue curve.
Con il particolare tipo di spirografo che abbiamo descritto si possono generare delle curve che sono dette *ipotrocoidi*. Questo strumento può essere utilizzato per esplorare e dimostrare proprietà di questa particolare famiglia di curve, ma ci interessa qui relativamente ai legami con alcuni aspetti elementari di teoria dei numeri. Infatti, è possibile ad esempio esplorare la relazione tra il numero di petali e il rapporto tra il numero di dentini della ruota e il numero di dentini dell'anello (che varia in modo proporzionale alla lunghezza del raggio). Quello che si scopre più precisamente è che il numero di "petali" (P) corrisponde esattamente al rapporto tra il minimo comune multiplo dei due numeri di dentini (rispettivamente N_R e N_A) e il numero di dentini dell'anello. Vale a dire:

$$P = \frac{\mathrm{m.c.m.}\,(N_R, N_A)}{N_A}.$$

Così, ogni volta che una ruota compie un giro completo su se stessa percorre dell'anello esattamente il suo stesso numero di dentini ($N_R < N_A$): ecco che il numero di volte totali in cui la ruota gira su se stessa per chiudere una curva è proprio uguale a P. La ruota invece percorre l'anello un certo numero di volte che, moltiplicato per P, dà il nostro minimo comune multiplo. Analoghe considerazioni possono essere fatte per il massimo comune divisore e, in generale, sull'aritmetica modulare che il sistema anello-ruota considerato ci porta a studiare.
Ci focalizzeremo su alcuni risvolti didattici e matematici dell'attività a partire da alcuni dei ragionamenti che sono emersi in classe quinta primaria durante la sperimentazione, allo scopo di approfondire la possibilità di un utilizzo dello spirografo per un approccio precoce a concetti di teoria elementare (ma non per questo meno importante) dei numeri. Particolare attenzione sarà posta al modo di dare senso a, immaginare e prevedere i diagrammi che si generano dal movimento delle varie configurazioni di ingranaggi.