Le simmetrie dei poliedri regolari

Le isometrie del piano e dello spazio sono state classificate da due illustri matematici.
Per quanto riguarda il piano, il **teorema di Chasles**, del 1831, afferma che "*nel piano i tipi possibili di isometrie si riducono ai seguenti casi: riflessioni, rotazioni, traslazioni e glissoriflessioni*".
Più precisamente un'isometria piana che fissa un punto è una rotazione o una riflessione, mentre un'isometria piana che non fissa punti è una traslazione oppure una glissoriflessione (ossia la composizione di una traslazione e di una riflessione di asse parallelo alla direzione della traslazione).

Il **teorema di Eulero**, del 1776, afferma che *nello spazio i tipi possibili di isometrie si riducono ai seguenti casi: riflessioni* (rispetto ad un piano)*, rotazioni, traslazioni, glissoriflessioni* (composizioni di una riflessione con una traslazione in una direzione parallela al piano di simmetria della riflessione)*, glissorotazioni* (composizioni di una rotazione con una traslazione parallela all'asse di rotazione) *e rotoriflessioni* (composizioni di una rotazione con una riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse di rotazione) .

Il **Teorema di Lagrange** afferma che *l'ordine di un sottogruppo di un gruppo finito G divide l'ordine del gruppo G.*

Un altro importante risultato sui sottogruppi finiti, che determina il numero di sottogruppi possibili di un gruppo dato, è costituito dai 3 **teoremi di Sylow**, che per i nostri scopi possiamo riassumere nel seguente enunciato: *sia G un gruppo finito di ordine* mp^n *dove* p *è un numero primo che non divide* m. *Allora G contiene un sottogruppo H di ordine* p^i *per* $1 \leq i \leq n$. *Inoltre il numero di sottogruppi di G di ordine* p^n *divide* m *ed è congruo a* 1(mod p).

Le simmetrie del tetraedro

Poiché ogni simmetria del tetraedro induce una permutazione dei quattro vertici, il suo gruppo di simmetria è contenuto in S_4.

Considerando gli elementi di simmetria del tetraedro otteniamo il gruppo di simmetria proprio, dato dalle rotazioni che conservano la figura:

- identità
- 8 rotazioni di ordine 3 (di angolo pari a $k \cdot 120°$, con k=1,2) dove i 4 assi passano per un vertice e sono perpendicolari alla faccia opposta.
- 3 rotazioni di ordine 2 (di angolo pari a 180°), dove i 3 assi passano per i punti medi di due spigoli opposti

Tale gruppo ha 12 elementi ed è isomorfo ad A_4, ossia il gruppo delle permutazioni pari di quattro elementi (i vertici del tetraedro).
Per permutazione pari si intende una permutazione che può essere ottenuta mediante un numero pari di scambi successivi.

Inoltre il tetraedro possiede 6 piani di simmetria che determinano

- 6 riflessioni rispetto ai 6 piani passanti per uno spigolo e per il punto medio dello spigolo opposto

In totale si hanno 18 elementi, ma per il teorema di Lagrange non esiste un tale sottogruppo di S_4, poiché 18 non divide 24 e, dato che il più piccolo divisore di 24 maggiore di 18 è 24 stesso, i due gruppi devono coincidere.

- le 6 simmetrie mancanti sono roto-riflessioni, più precisamente le riflessioni rotatorie che si ottengono componendo: una rotazione di un angolo di $90° + k\cdot 180°$ con k=0,1 (quindi rotazioni di 90° in senso orario e antiorario) attorno ad uno dei tre assi di rotazione di ordine 2, seguita da una riflessione rispetto al piano perpendicolare all'asse di rotazione passante per il baricentro del tetraedro. Tre assi per due versi di rotazione danno le 6 simmetrie mancanti.
  È da notare che né le rotazioni di 90° né le riflessioni rispetto al piano sono, in questo caso, simmetrie del tetraedro.

Le simmetrie del cubo e dell'ottaedro

I gruppi di simmetria di due poliedri regolari duali sono isomorfi: infatti, per dualità, le simmetrie di uno determinano le simmetrie dell'altro.

Si considera allora il caso del cubo, ricordando che per l'ottaedro vale un discorso analogo. Le simmetrie del cubo sono 48:

- 24 rotazioni (ossia le simmetrie dirette). Il sottogruppo delle rotazioni del cubo è, isomorfo a S_4: la corrispondenza consiste nel fatto che ogni rotazione determina una ed una sola permutazione delle quattro diagonali del cubo;
  I possibili assi di rotazione, ossia le rette attorno alle quali far ruotare il cubo in modo che torni se stesso, sono di tre tipi:
  - assi che passano per i centri di due facce opposte. Le rotazioni di $k\cdot 90°$, con k =1,2,3,4 intorno a queste rette sono simmetrie del cubo. Nel cubo ci sono tre distinte rette di questo tipo, ma la rotazione di un giro completo, 360° (ossia con k=4), determina sempre l'identità. Ne sono quindi individuate non 12, ma **10** simmetrie.
  - assi che passano per i punti medi di due spigoli opposti. Le rotazioni possibili attorno a queste rette (a parte l'identità che è stata già considerata) sono solo quelle di 180°. Assi di questo tipo sono sei nel cubo, dunque ecco altre **6** simmetrie del cubo.
  - assi che passano per due vertici opposti. Il cubo in quest'ultimo caso può essere ruotato di $k\cdot 120°$ con k=1,2. Ci sono quattro coppie di vertici opposti, quindi ecco altre **8** simmetrie di rotazione.

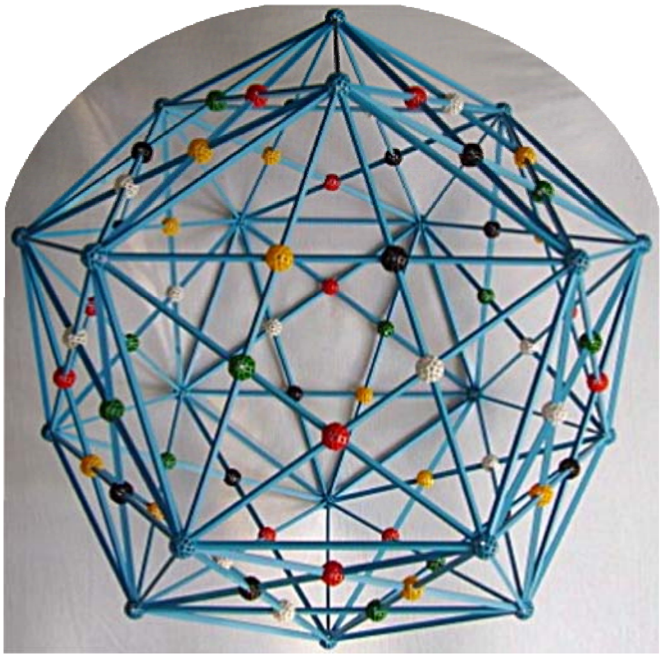
- 9 riflessioni rispetto ai 9 piani di simmetria: 3 paralleli alle facce e 6 piani diagonali;
- 15 roto-riflessioni:
  - alcune ottenute ruotando di $k\cdot 90°$ con k=1,2,3 attorno ad uno dei 3 assi di ordine 4 e poi compiendo una riflessione rispetto al piano di simmetria perpendicolare all'asse di rotazione. Si sarebbero quindi trovate altre 9 simmetrie, ma, nel caso dell'angolo di 180° (k=2), ciascuna roto-riflessione coincide con la riflessione centrale, dunque le nuove simmetrie risultano in effetti solo 7;
  - altre ottenute ruotando di un angolo pari a $60° + k\cdot 120°$ con k=0,1,2 e assi passanti per due vertici opposti. Poiché tali assi sono 4, verrebbero a configurarsi altre 12 simmetrie, ma ancora una volta per k=1 si ritrova la riflessione centrale, dunque le nuove simmetrie risultano 8.

Il gruppo delle simmetrie del cubo è allora isomorfo a $S_4 \times \mathbf{Z}_2$ dove il gruppo S_4 è dato dalle simmetrie delle 4 diagonali del cubo e il gruppo $\mathbf{Z}_2=\{-1,1\}$ ha come elemento generatore la riflessione centrale, la quale commuta con qualunque altra simmetria.

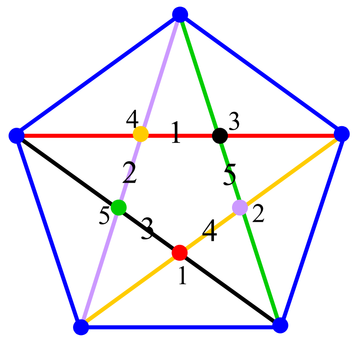
Le simmetrie del dodecaedro e dell'icosaedro

Anche questi due poliedri regolari sono duali, dunque i gruppi delle loro simmetrie saranno isomorfi. Si analizzano allora le simmetrie del dodecaedro.

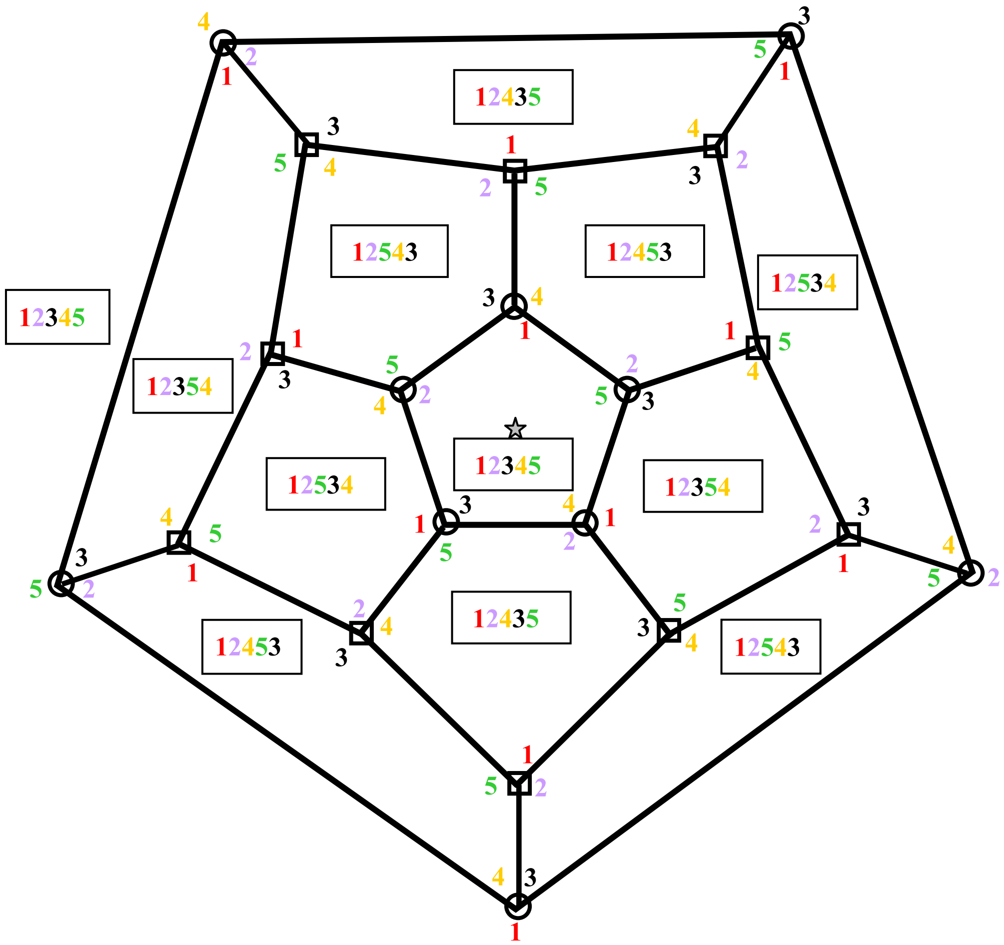
Il gruppo delle rotazioni del dodecaedro è isomorfo ad A_5, il gruppo delle permutazioni pari su 5 elementi.
La corrispondenza sta nel fatto che ogni rotazione determina una e una sola permutazione pari dei 5 cubi inscritti nel dodecaedro.
Infatti ogni faccia pentagonale del dodecaedro possiede 5 diagonali. Ognuna di queste non è altro che lo spigolo di uno dei 5 cubi inscritti nel dodecaedro.
Osserviamo che le facce di un dodecaedro sono 12, tante quanti sono gli spigoli di un cubo.



Nelle costruzioni si è deciso di evidenziare ogni cubo con un proprio colore. Poiché, per costruire un dodecaedro con materiale Zome occorrono solo strutture blu, non è stato possibile attribuire cinque diversi colori agli spigoli del cubo; si è pensato allora di assegnare il colore dello spigolo utilizzando quello del vertice del pentagono interno alla stella opposto allo spigolo stesso, come indicato nella figura che rappresenta una faccia del dodecaedro. Si ottiene quindi un dodecaedro con spigoli e vertici blu, al cui interno sono inscritti i cinque cubi: giallo = 4, nero = 3, bianco = 2, rosso = 1, verde = 5.



La figura seguente rappresenta la rete piana di un dodecaedro e illustra la corrispondenza tra le rotazioni e le simmetrie pari dei cubi:



Per leggere in modo adeguato la figura, basta ricordare che la faccia “infinita” (ossia la regione di piano esterna alla figura) corrisponde alla faccia opposta a quella del pentagono centrale e che la stella centrale indica il centro di simmetria del dodecaedro.
Attorno a ciascun vertice sono stati sistemati 3 numeri colorati che individuano, per ciascuna delle 3 facce del dodecaedro aventi in comune quel vertice, il cubo inscritto nel dodecaedro che ha per spigolo la diagonale del pentagono parallela al lato opposto al vertice considerato. Come prima il n.1 sarà associato al cubo rosso, il n.2 al bianco, il n.3 al nero, il n.4 al giallo e il n.5 al cubo verde. I vertici che sono diametralmente opposti (o antipodali) stanno su rette passanti per il centro di simmetria e sono contrassegnati con lo stesso simbolo (circolare o quadrato).
Seguendo le indicazioni della figura risulta più semplice individuare come le simmetrie dirette del dodecaedro, ossia le 60 rotazioni, corrispondono alle permutazioni pari dei cinque cubi inscritti nel dodecaedro:

- identità
- 24 rotazioni di ordine 5, di asse passante per i centri di due facce opposte e di angolo di rotazione pari a $k\cdot 72°$ con k=1,2,3,4,5, dove nel caso k=5 si ritrova chiaramente l’identità: 4 per ogni coppia di facce opposte (6 coppie) più l’identità. Tali rotazioni corrispondono alle permutazioni pari corrispondenti ai cicli di ordine 5 ottenuti permutando circolarmente i 5 cubi secondo l’ordine dato dai 5 spigoli appartenenti ad una stessa faccia. Le successioni dei cinque numeri nei riquadri della figura indicano tale ciclo (e le sue potenze). Ad esempio, per quanto riguarda la faccia centrale, una rotazione con k=1 in verso antiorario genera il ciclo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

allo stesso modo, per la faccia con vertici $\boxed{12534}$ una rotazione di 72° in verso orario genera il ciclo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (1 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 4)$$

Per ogni faccia vi è una e una sola rotazione che determina un ciclo del tipo (1 2 a b c), ciò assicura che a rotazioni diverse corrispondono cicli diversi e che la corrispondenza è biunivoca. Inoltre si può notare nella figura che facce opposte sono caratterizzate dallo stesso ciclo (stessa successione di colori dei vertici del pentagono interno) in quanto l'asse di simmetria passa per il loro centro.

- 20 rotazioni di ordine 3, di asse passante per due vertici opposti e di angolo di rotazione pari a $k\cdot 120°$ con k=1,2,3, dove nel caso k=3 si ritrova chiaramente l'identità: le coppie di vertici opposti sono 10. Tali rotazioni corrispondono a cicli di ordine 3 individuati dalla permutazione circolare dei tre numeri attorno a due vertici antipodali.
- 15 rotazioni di ordine 2, di asse passante per i punti medi di due spigoli opposti e di angolo di rotazione pari a $k\cdot 180°$ con k=1,2 dove nel caso k=2 si ritrova chiaramente l'identità: le coppie di spigoli opposti sono 15. Tali rotazioni corrispondono a doppi scambi individuati dallo scambio incrociato delle due coppie di numeri che indicano i due estremi di uno spigolo comune a due facce del dodecaedro.

Sono state così esaminate tutte le rotazioni che trasformano il dodecaedro in se stesso e le corrispondenti permutazioni pari dei 5 cubi inscritti da esse determinate.

Poiché A_5 ha 60 elementi e $60 = 5\cdot 3\cdot 2^2$, per il teorema di Sylow possiamo calcolare il numero di sottogruppi di ordine 5. Esso, infatti, deve dividere 12 ed essere congruo a 1(mod5). Pertanto i possibili sottogruppi di A_5 di ordine 5 sono 1 o 6. Tali sottogruppi corrispondono al numero delle coppie di facce antipodali del dodecaedro e quindi sono 6. Analogamente i sottogruppi di ordine 3 sono 10 (per Sylow potrebbero essere 1, 4 oppure 10), e corrispondono al numero di coppie di vertici antipodali. Quelli di ordine 4 sono 5 (per Sylow potrebbero essere 1, 3 oppure 5), infatti ognuno dei 5 cubi inscritti nel dodecaedro possiede un sottogruppo di ordine 4 formato dalle rotazioni di 180° attorno agli assi passanti per i centri di due facce opposte. Tali gruppi inducono sul dodecaedro 5 sottogruppi di simmetrie pari, corrispondenti a doppi scambi, di ordine 4. Infine i sottogruppi di ordine 2 sono 15, tanti quante le coppie antipodali di spigoli del dodecaedro.

Altre 60 simmetrie sono possibili nel dodecaedro, le simmetrie inverse:

- 15 riflessioni rispetto ad un piano passante per (il centro e) due spigoli opposti: le coppie di spigoli opposti sono 15
- 25 roto-riflessioni di ordine 5, di asse passante per i centri di due facce opposte e di angolo 36° + $k\cdot 72°$ e k=0,1,2,3,4, tra cui la riflessione centrale (per k=2 tutte le roto-riflessioni di ordine 5 considerate coincidono con la riflessione centrale): le coppie di facce opposte sono 6, occorre però contare una sola volta la riflessione centrale.
- 20 roto-riflessioni di ordine 3, di asse passante per due vertici opposti e di angolo di rotazione pari a 60° + $k\cdot 120°$, con k=0,2 (per k=1 le roto-riflessioni coincidono con la riflessione centrale): le coppie di vertici opposti sono 10.

Il gruppo totale delle simmetrie del dodecaedro (e dell'icosaedro) è isomorfo ad $A_5 \times \boldsymbol{Z}_2$.
Proprio come avviene per il gruppo di simmetria del cubo e dell'ottaedro, l'isomorfismo si ottiene considerando come elemento generatore di $\boldsymbol{Z}_2$ la riflessione centrale, la quale commuta con qualunque altra simmetria.