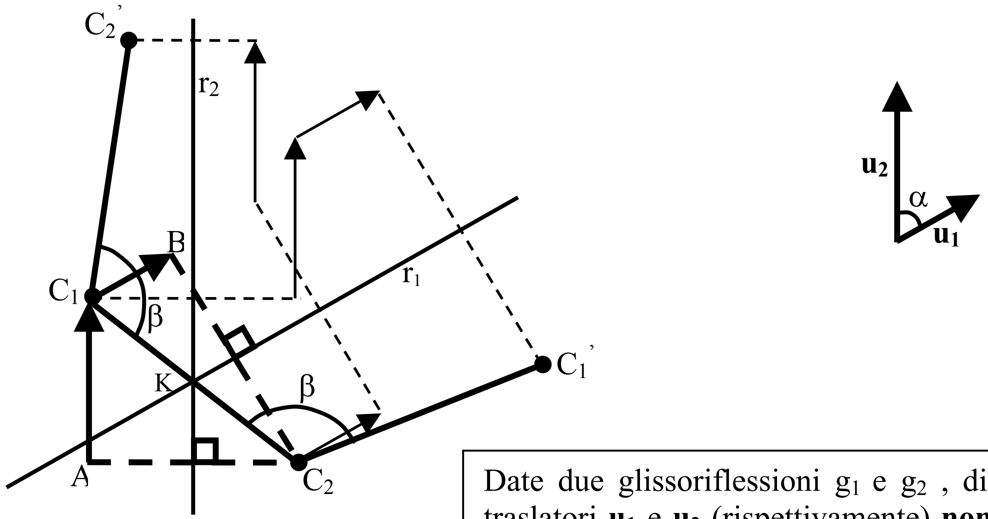
Come costruire il prodotto di due isometrie piane

Giorgio Ferrarese
Dipartimento di Matematica
Università di Torino

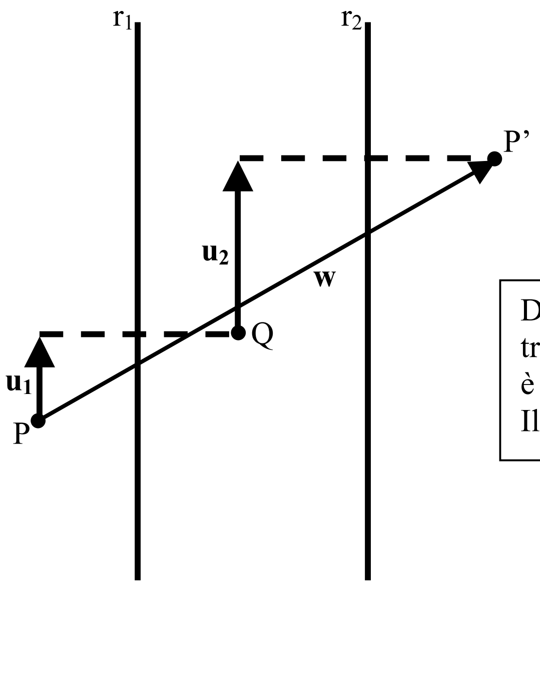
Le isometrie piane si suddividono in *dirette*, **traslazioni** e **rotazioni**, ed *inverse*, **riflessioni** e **glissoriflessioni.** Il prodotto di due isometrie dello stesso tipo è sempre una isometria diretta, mentre il prodotto di due isometrie di tipo differente è una isometria inversa. Per individuare il tipo specifico di una isometria prodotto, con i suoi elementi caratteristici, sarà sufficiente verificare l'esistenza o meno di un punto fisso, poiché se una isometria ha un punto fisso è una rotazione, se si tratta di una isometria diretta, una riflessione, nel caso di una isometria inversa.
Avvertenza: nel seguito le riflessioni vengono trattate come casi particolari di glissoriflessioni e quindi non vengono menzionate esplicitamente .

Prodotto di due glissoriflessioni

Come costruire la rotazione prodotto di due glissoriflessioni g_1 e g_2 di assi paralleli ai vettori $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$*, tra loro non paralleli*:
è sufficiente disegnare il quadrilatero AC_1BC_2, dove $AC_1 = \mathbf{u_2}$, $CB = \mathbf{u_1}$, AC_2 è perpendicolare ad AC_1 e BC_2 è perpendicolare a C_1B, ***in modo tale che*** $K = r_1 \cap r_2$ sia il punto medio di C_1C_2 .



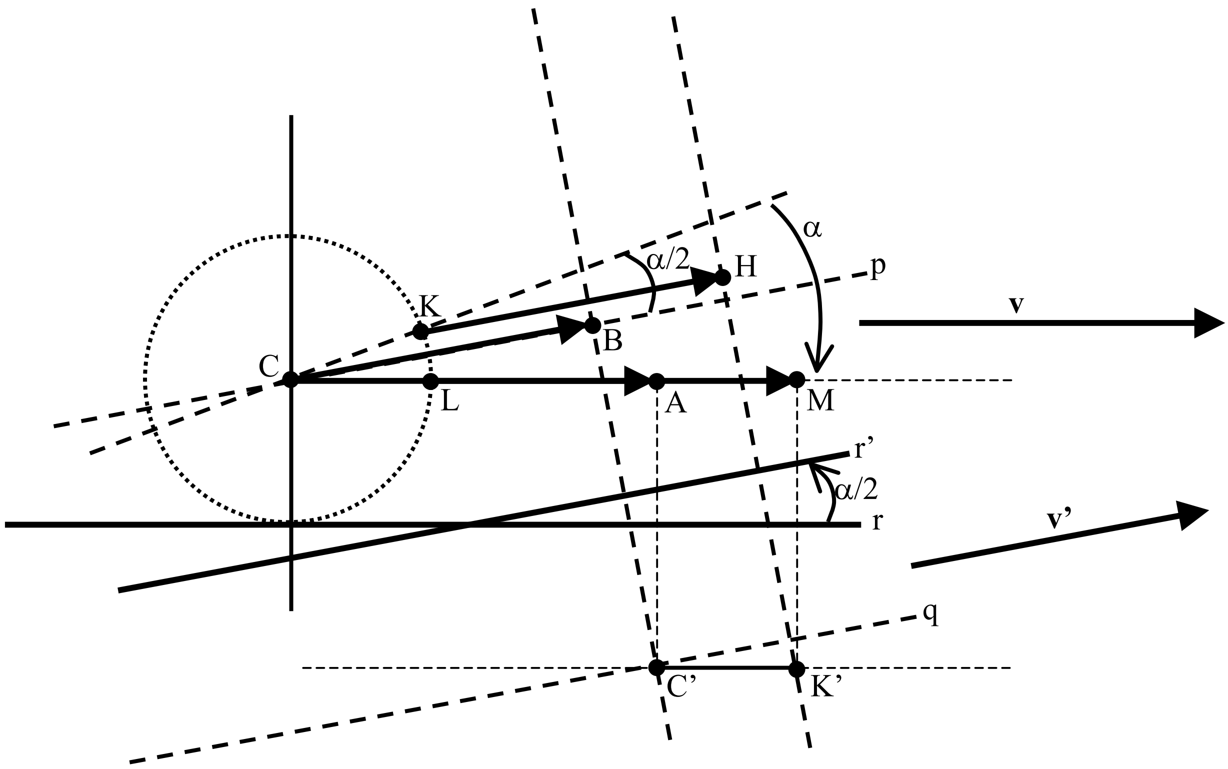
Date due glissoriflessioni g_1 e g_2 , di assi r_1 e r_2 e vettori traslatori $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ (rispettivamente) **non paralleli**, il prodotto g_2g_1 è equivalente ad una rotazione ρ_1 di centro C_1 ed angolo $\beta=2\alpha$, dove α è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$.
C_1 è infatti un punto fisso per g_2g_1 .
Il prodotto g_1g_2 delle stesse glissoriflessioni equivale invece ad una rotazione ρ_2 di centro C_2 ed angolo $\beta=2\alpha$.
C_2 è infatti un punto fisso per g_1g_2.
$K = r_1 \cap r_2$ è il punto medio di C_1 e C_2 .
C_1' è il trasformato di C_1 mediante $\rho_2 = g_1g_2$ e C_2' è il trasformato di C_2 mediante $\rho_1 = g_2g_1$.



Date due glissoriflessioni g_1 e g_2 , di assi r_1 e r_2 e vettori traslatori $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ (rispettivamente) **paralleli**, il prodotto g_2g_1 è equivalente ad una traslazione di vettore $\mathbf{w}$.
Il prodotto g_1g_2 si comporta in modo analogo.

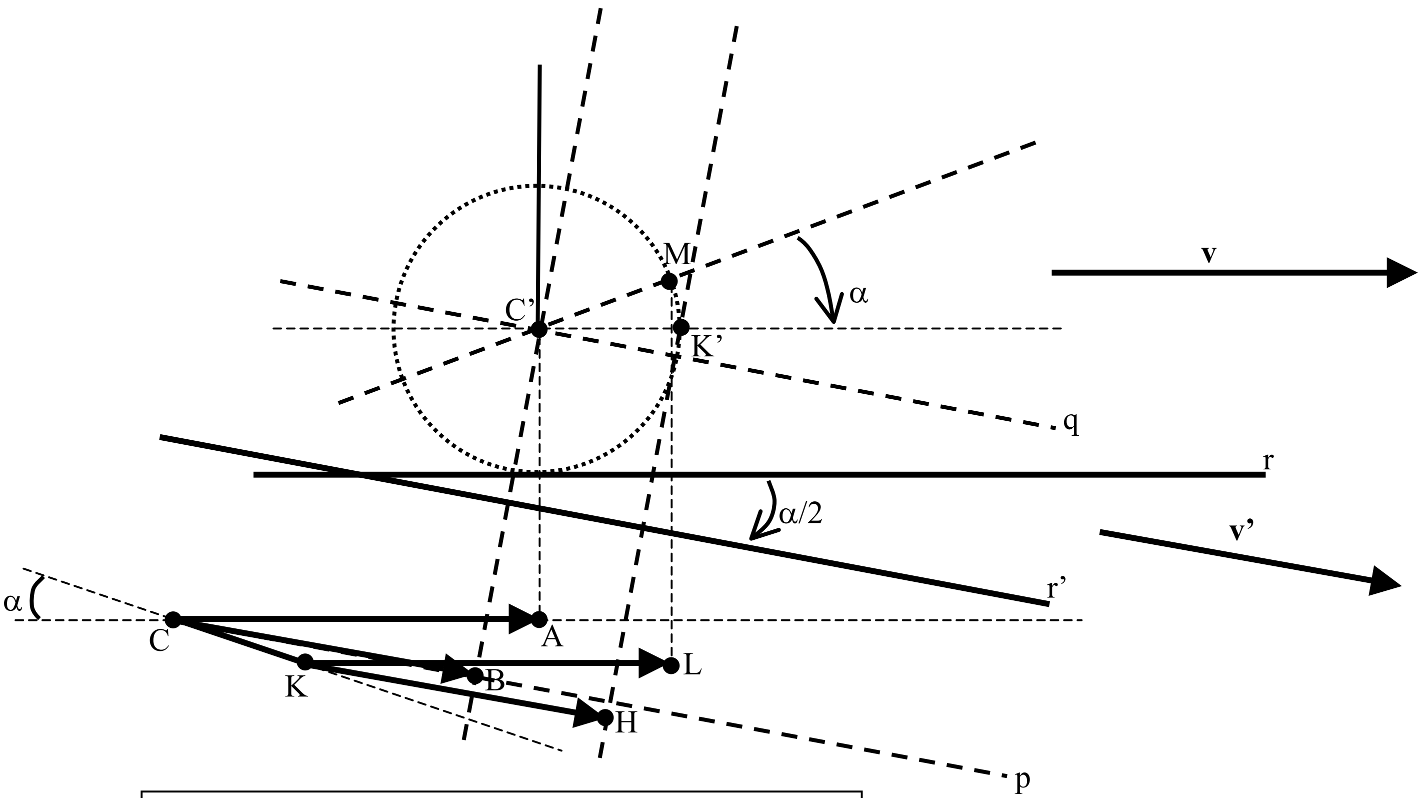
Prodotto di rotazione e glissoriflessione

Come costruire la glissoriflessione prodotto gρ di una rotazione ρ, di ampiezza α e centro C, per una glissoriflession g di asse r e vettore traslatore **v** *:*
scegliere **v** come orizzontale. A partire poi dai punti C e K, K tale che ρ porti K sull'orizzontale per C, siano C' e K' tali che C' = gρ(C) e K' = gρ(K). Poiché CK e C'K' formano un angolo di ampiezza α e poiché C'K' è orizzontale, l'asse r' della glissoriflessione gρ deve formare un angolo di ampiezza α/2 con l'orizzontale (verso opposto a quello di α) e deve dividere in due la fascia delimitata dalle rette p e q parallele a r' e passanti rispettivamente per C e C'.



ρ : rotazione oraria di ampiezza α e centro C
g : glissoriflessione di asse r e vettore traslatore **v**
g' = gρ : glissoriflessione di asse r' e vettore traslatore **v'**
|CK| = |C'K'|
v = $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{LM}$
v' = $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{KH}$
KL: arco di ampiezza α

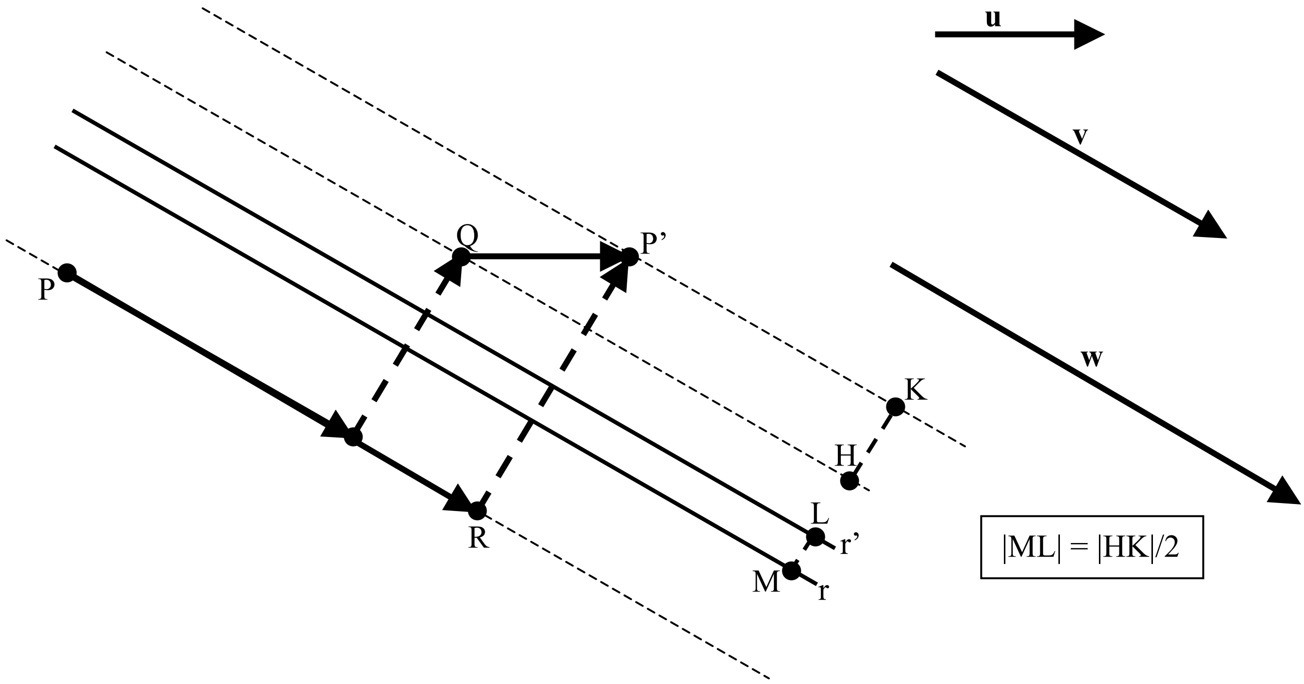
Come costruire la glissoriflessione prodotto ρg di una rotazione ρ, di ampiezza α e centro C', per una glissoriflession g di asse r e vettore traslatore **v** *:*
scegliere **v** come orizzontale. A partire poi dai punti C' e K' sull'orizzontale per C', siano C e K tali che C' = ρg(C) e K' = ρg(K). Poiché CK e C'K' formano un angolo di ampiezza α e C'K' è orizzontale, l'asse r' della glissoriflessione ρg deve formare un angolo di ampiezza α/2 con l'orizzontale (stesso verso di α) e deve dividere in due la fascia delimitata dalle rette p e q parallele a r' e passanti rispettivamente per C e C'.



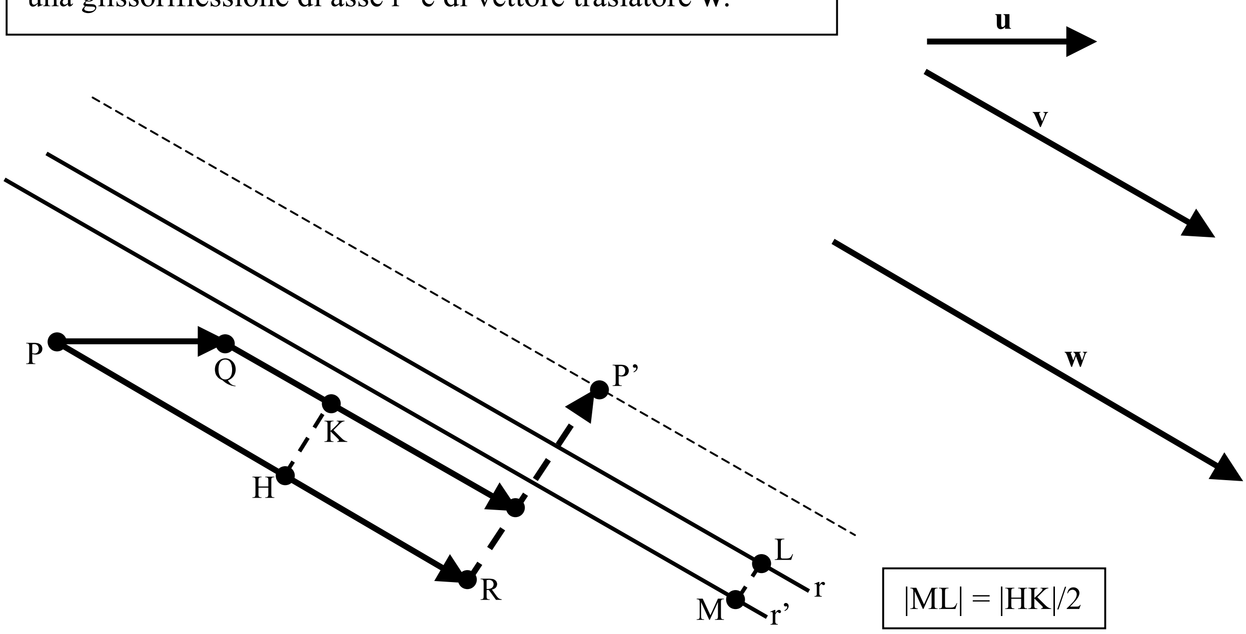
ρ : rotazione oraria di ampiezza α e centro C'
g : glissoriflessione di asse r e vettore traslatore **v**
g' = ρg : glissoriflessione di asse r' e vettore traslatore **v'**
|CK| = |C'K'|
$\mathbf{v} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{KL}$
$\mathbf{v'} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{KH}$
K'M: arco di ampiezza α

Prodotto di traslazione e glissoriflessione

Data una traslazione τ di vettore **u** ed una glissoriflessione g di asse r e vettore traslatore **v**, il prodotto τg è equivalente ad una glissoriflessione di asse r’ e di vettore traslatore **w**.

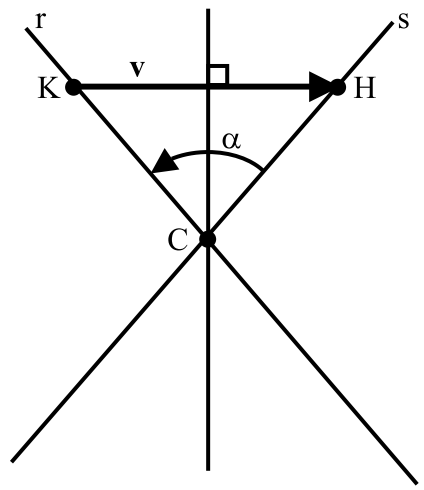


Data una traslazione τ di vettore **u** ed una glissoriflessione g di asse r e vettore traslatore **v**, il prodotto gτ è equivalente ad una glissoriflessione di asse r’ e di vettore traslatore **w**.

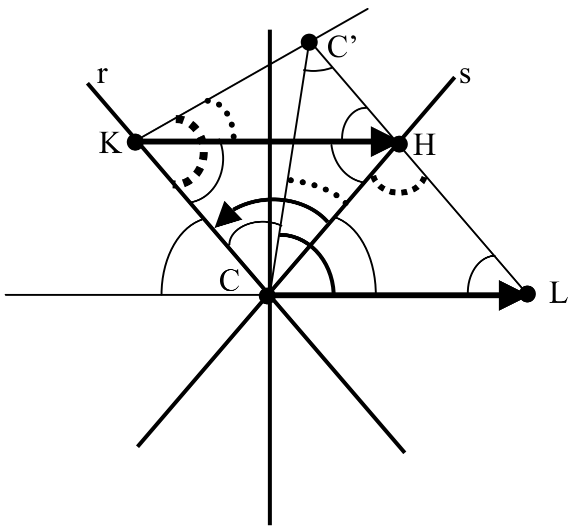


Prodotto di traslazione e rotazione

Come costruire le rotazione prodotto $\rho\tau$ e $\tau\rho$ di una rotazione ρ, di ampiezza α e centro C, per una traslazione τ di vettore **v** *:*
scegliere **v** come orizzontale. Trovare H e K tali che K∈r, H∈s, KH sia uguale al vettore **v**.
$\rho\tau$(K) = K , allora K è il centro della rotazione $\rho\tau$, di ampiezza α (stesso verso di ρ) , mentre H = $\tau\rho$ (H) è il centro della rotazione $\tau\rho$, sempre di ampiezza α (stesso verso di ρ).



ρ : rotazione antioraria di ampiezza α e centro C
τ : traslazioni di vettore **v**
$\rho\tau$: rotazione antioraria di ampiezza α e centro K
$\tau\rho$: rotazione antioraria di ampiezza α e centro H



Proviamo che $\rho\,\tau$ è una rotazione di ampiezza α e centro K.
Sia C' = $\rho\tau$(C) , proveremo che KC' = KC e che l'angolo CKC' ha ampiezza α.
Sappiamo che gli angoli LCC' e HCK sono di ampiezza α per costruzione.
Sia β tale che $2\beta = \pi - \alpha$, allora è semplice verificare che gli angoli indicati in figura con tratto sottile sono tutti di ampiezza β. Inoltre l'angolo CHL è di ampiezza α.

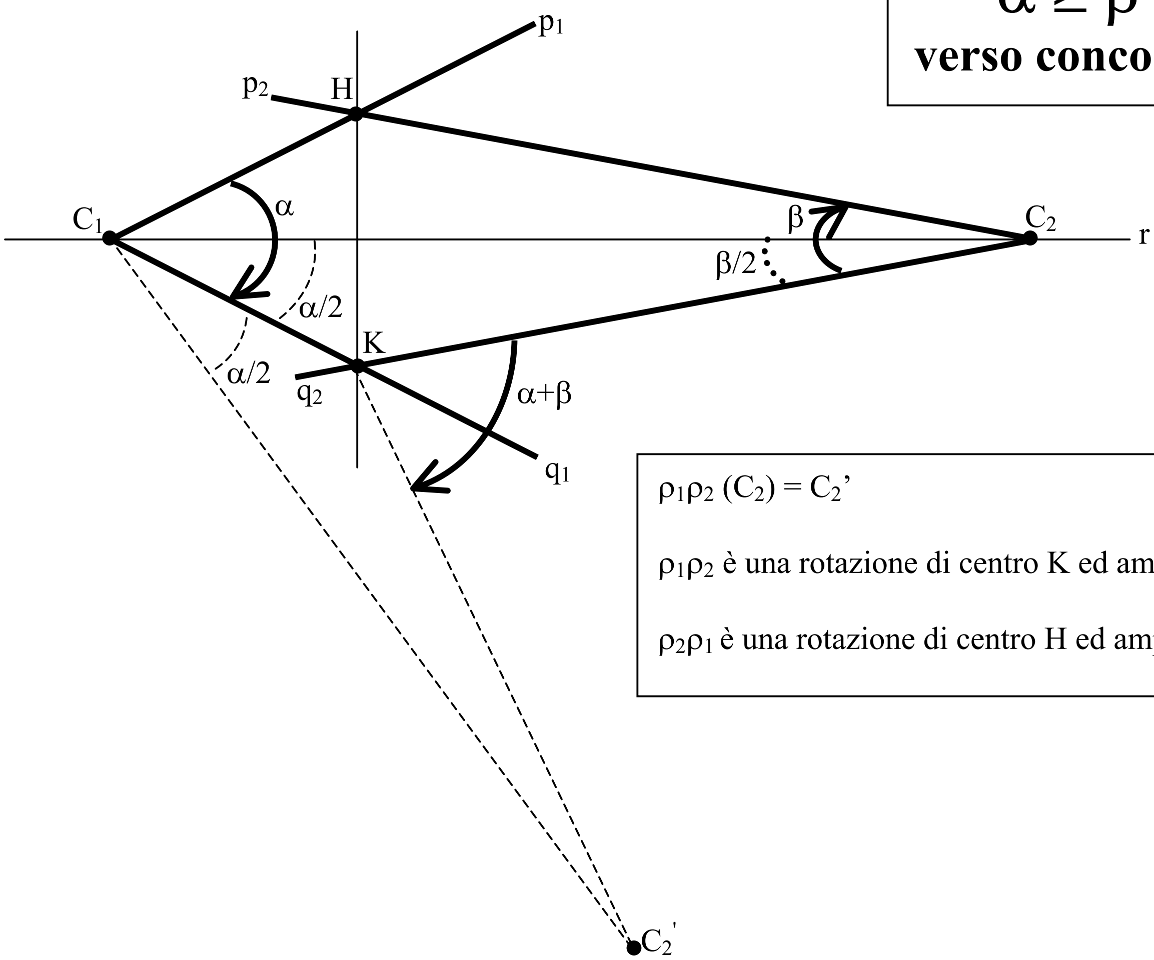
- H ∈ retta C'L, infatti LH e LC' formano un angolo β con LC, perché il parallelogramma KCLH ha angoli $\alpha+\beta$ e β.
- Il triangolo KHC' è uguale al triangolo CC'H poiché hanno CC' e C'H in comune e l'angolo C'HK è uguale all'angolo CC'H = β.

Dunque l'angolo C'KH = C'CH ha ampiezza $|\alpha-\beta|$ per cui l'angolo C'KC ha ampiezza α. Inoltre C'K = CH = CK, quindi C'K = CK.
Osservando poi che HC = HL e $\tau\rho$ (C) = L si ottiene analogamente che $\tau\,\rho$ è una rotazione di centro H ed ampiezza α.

Prodotto di due rotazioni

Come costruire le rotazioni prodotto $\rho_1\rho_2$ e $\rho_2\rho_1$ di due rotazioni ρ_1 e ρ_2 , di ampiezze α e β e centri C_1 e C_2 rispettivamente, $\alpha \geq \beta$ *con verso concorde :*
sia r la retta per C_1 e C_2 e p_1 e q_1 le due semirette di origine C_1 che formano tra loro un angolo α, per cui r sia una bisettrice e tali che C_2 appartenga alla regione di piano individuata da α.
Analogamente siano p_2 e q_2 le due semirette di origine C_2 che formano tra loro un angolo β, per cui r sia una bisettrice e tali che C_1 appartenga alla regione di piano individuata da β.
Siano $H = p_1 \cap p_2$ e $K = q_1 \cap q_2$, allora H e K sono i centri delle rotazioni prodotto, di ampiezza $\alpha+\beta$ (verso concorde a quello di α e β) .

$\alpha \geq \beta$
verso concorde



$\rho_1\rho_2\,(C_2) = C_2'$

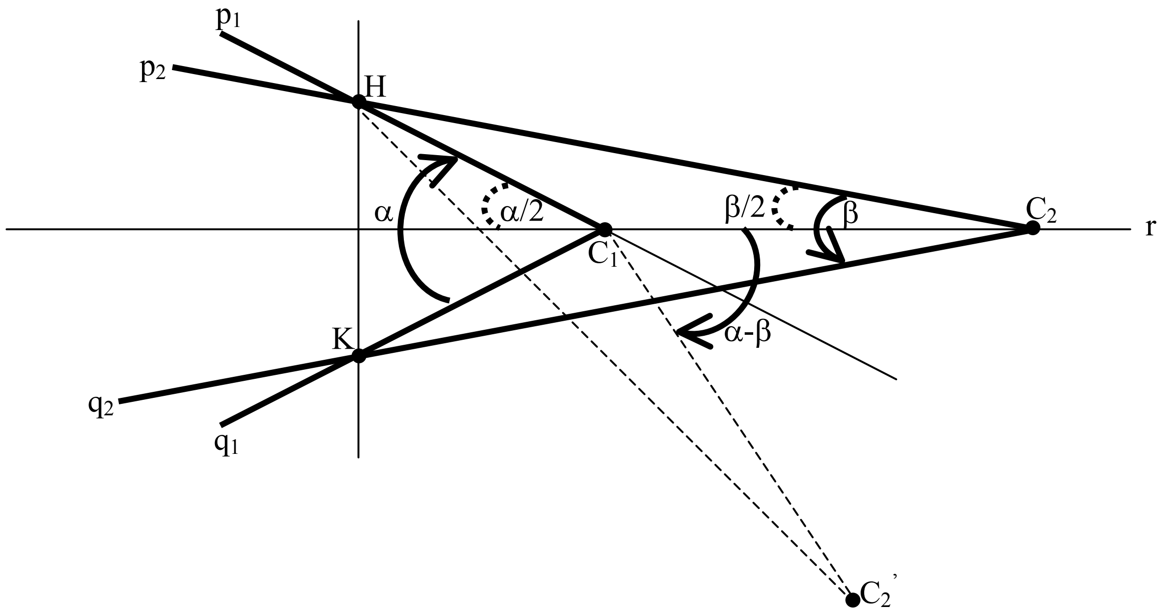
$\rho_1\rho_2$ è una rotazione di centro K ed ampiezza $\alpha+\beta$.

$\rho_2\rho_1$ è una rotazione di centro H ed ampiezza $\alpha+\beta$.

Come costruire le rotazioni prodotto $\rho_1\rho_2$ e $\rho_2\rho_1$ di due rotazioni ρ_1 e ρ_2, di ampiezze α e β e centri C_1 e C_2 rispettivamente, $\alpha > \beta$ *con verso discorde :*
sia r la retta per C_1 e C_2 e p_1 e q_1 le due semirette di origine C_1 che formano tra loro un angolo α, per cui r sia una bisettrice e tali che C_2 non appartenga alla regione di piano individuata da α.
Analogamente siano p_2 e q_2 le due semirette di origine C_2 che formano tra loro un angolo β, per cui r sia una bisettrice e tali che C_1 appartenga alla regione di piano individuata da β.
Siano $H = p_1 \cap p_2$ e $K = q_1 \cap q_2$, allora H e K sono i centri delle rotazioni prodotto, di ampiezza α-β (verso concorde a quello di α).

$\alpha > \beta$

verso discorde



$\rho_1\rho_2 (C_2) = C_2'$

$\rho_1\rho_2$ è una rotazione di centro H ed ampiezza α-β.

$\rho_2\rho_1$ è una rotazione di centro K ed ampiezza α-β.

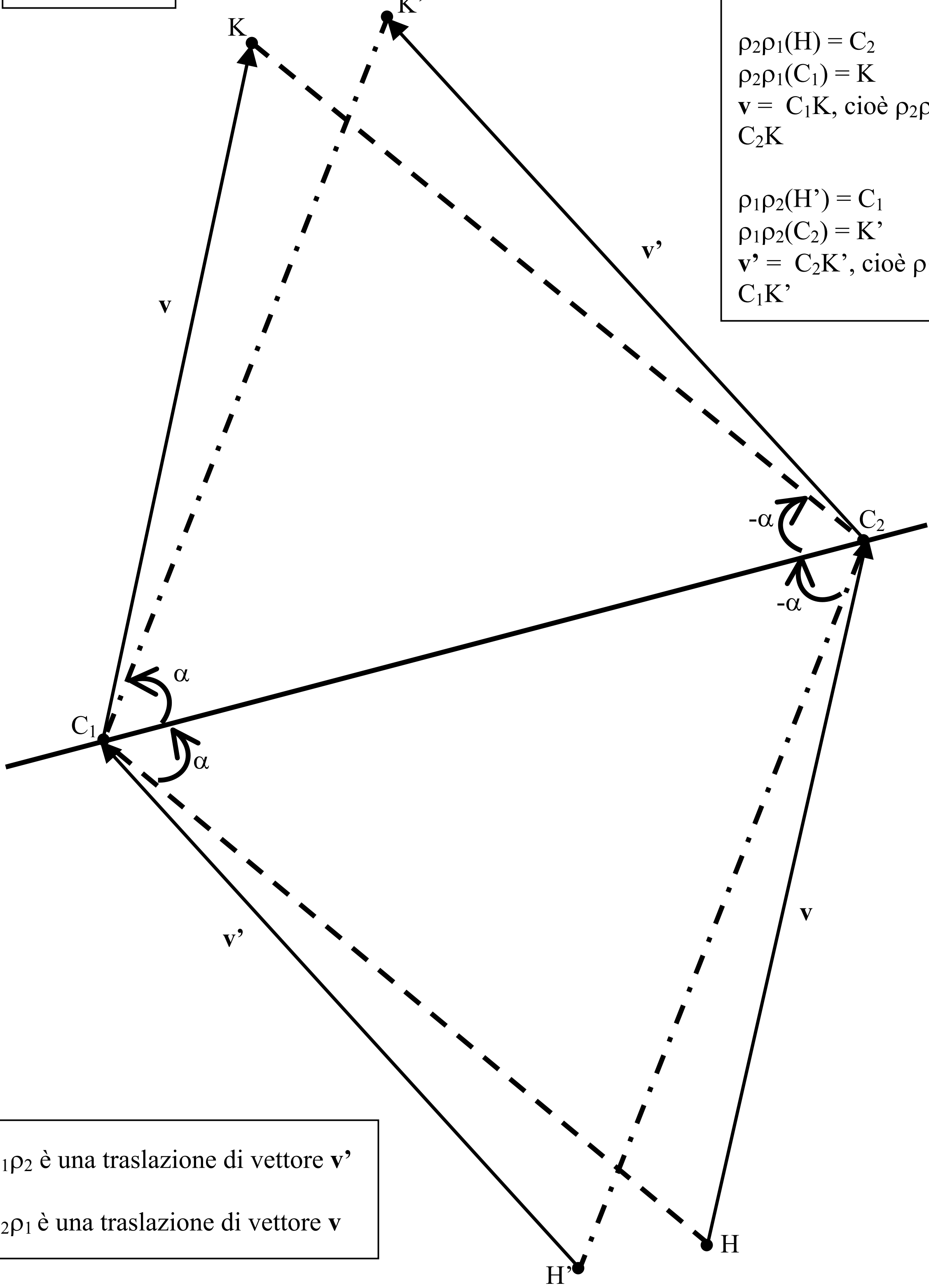
Se $\beta = -\alpha$, *le rotazioni prodotto* $\rho_1\rho_2$ *e* $\rho_2\rho_1$ *sono due traslazioni di vettori* **v** *e* **v'** *come in figura, ossia* ***" come poter spostare un armadio con due rotazioni! "***.

$\beta = -\alpha$

$K = \rho_2 (C_1)$ $\quad C_1C_2 = H'C_2$
$K' = \rho_1 (C_2)$ $\quad C_1C_2 = K'C_1$
$C_2 = \rho_1 (H)$ $\quad C_1C_2 = C_1H$
$C_1 = \rho_2 (H')$ $\quad C_1C_2 = C_2K$

$\rho_2\rho_1(H) = C_2$
$\rho_2\rho_1(C_1) = K$
v = C_1K, cioè $\rho_2\rho_1$ trasla HC_1 in C_2K

$\rho_1\rho_2(H') = C_1$
$\rho_1\rho_2(C_2) = K'$
v' = C_2K', cioè $\rho_1\rho_2$ trasla $H'C_2$ in C_1K'



$\rho_1\rho_2$ è una traslazione di vettore **v'**

$\rho_2\rho_1$ è una traslazione di vettore **v**