ISOMETRIE

Come si possono muovere i punti del piano senza cambiare la forma e le dimensioni delle figure? Più precisamente vogliamo che, dopo aver eseguito il movimento, ogni coppia di punti del piano si trovi ad una distanza uguale a quella che aveva prima del movimento, anche se i punti potranno chiaramente occupare posizioni diverse da quelle di partenza. Un movimento di questo tipo viene detto *isometria*.

Tra i movimenti di questo tipo abbiamo:

1. Le *traslazioni* o spostamenti in linea retta = *scorrimenti*
2. Le *rotazioni* attorno ad un punto
3. Le *riflessioni rispetto ad una retta* (specchio): attenzione, una riflessione non è una rotazione nel piano, ma può essere pensata come una rotazione dello spazio.

Oltre a questi movimenti, possiamo ottenere ulteriori movimenti eseguendo uno dopo l'altro i tre movimenti precedenti nell'ordine che preferiamo, magari ripetendoli anche più volte: si parla di "composizione" di movimenti. Osserviamo che la composizione di due isometrie è ancora un movimento che non cambia la forma e le dimensioni delle figure e quindi è una isometria!

Scopriamo allora un nuovo tipo di isometrie del piano:

4. Le *riflessioni con scorrimento* (o *glissoriflessioni*): ossia movimenti ottenuti applicando prima una traslazione e poi una riflessione (rispetto ad una retta parallela alla direzione di traslazione) o viceversa. Il movimento ottenuto non rientra tra i tre tipi precedenti.

Il fatto importante è che tutte le isometrie del piano rientrano in uno di questi 4 tipi. Ossia, qualunque sia il movimento eseguito, magari ottenuto applicando una successione lunghissima di isometrie, si ottiene lo stesso risultato che avremmo ottenuto se avessimo applicato UNA SOLA delle 4 isometrie precedenti, anche se magari non è affatto facile scoprire quale.

Attenzione: la composizione successiva di isometrie non è sempre commutativa, per esempio prima traslare e poi ruotare può dare un risultato diverso dal movimento che si otterrebbe prima ruotando e poi traslando. Per le riflessioni con scorrimento invece è indifferente prima traslare e poi riflettere (rispetto ad una retta parallela alla direzione di traslazione) o viceversa.

I movimenti eseguiti dalle gru dei cantieri edili sono sempre composizioni di rotazioni e traslazioni.

I movimenti del nostro corpo sono composizioni di rotazioni delle nostre articolazioni. Potrebbe essere interessante ragionare su come far muovere un robot?

Esempi di composizioni:

- La composizione di due riflessioni di assi incidenti è una rotazione di angolo pari al doppio dell'angolo formato dagli assi di riflessione e di centro l'intersezione degli assi.
- La composizione di due riflessioni con assi paralleli è una traslazione, il cui "passo" è il doppio della distanza dei due assi.
- La composizione di due rotazioni, anche di centri distinti, è quasi sempre una rotazione, con un centro diverso dai primi due, ma può essere una traslazione nel caso in cui gli angoli delle due rotazioni siano l'uno l'opposto dell'altro: ***come spostare un armadio!***

Osserviamo che tra le isometrie del piano non abbiamo citato esplicitamente le simmetrie rispetto ad un punto, infatti una simmetria centrale non è nient'altro che una rotazione di 180° con centro il centro di simmetria. Dunque le simmetrie centrali sono comprese tra le rotazioni del piano.

SIMMETRIE

A volte, eseguendo un movimento di punti del piano, succede che una figura non solo non cambi né la forma né le dimensioni, ma si ritrovi ad occupare esattamente gli stessi punti del piano che occupava prima del movimento. Per esempio un quadrato, dopo una rotazione di 90° rispetto al suo centro, torna esattamente su se stesso e così pure una figura ottenuta per sovrapposizione, piegando un foglio di carta in due, rimane se stessa rispetto ad una riflessione di asse la piega.

Chiamiamo allora *simmetria di una figura* una isometria che "conserva" la figura (nella sua posizione iniziale). Attenzione: in una simmetria i punti di una figura si muovono, ma vengono ad occupare posizioni già occupate da punti della stessa figura.

Tra le varie isometrie e simmetrie di figure possibili consideriamo anche l'isometria identica e la simmetria identica (o *identità*), che è il movimento del piano che non muove nessun punto e quindi non può modificare certamente la forma delle figure, né tanto meno la loro posizione!

Le simmetrie di :

- *un RETTANGOLO sono 4, due riflessioni, una rotazione di 180° e l'identità*
- *un TRIANGOLO EQUILATERO sono 6, tre riflessioni, due rotazioni (di 120° e 240°) e l'identità*
- *un QUADRATO sono 8, quattro riflessioni, tre rotazioni (di 90°, di 180°, di 270°) e l'identità.*

Notiamo che tra le simmetrie di un poligono regolare ci sono sempre tante rotazioni (compresa l'identità) quante riflessioni! Non ci possono essere invece né traslazioni né riflessioni con scorrimento poiché queste spostano la figura.

Osservando che la composizione di due simmetrie di una figura è ancora una simmetria della stessa figura, proviamo a costruire le "tabelline pitagoriche" delle simmetrie delle tre figure precedenti utilizzando come operazione la composizione di isometrie che abbiamo visto prima: VEDERE I CARTELLONI DELLA MOSTRA SUL TEMA (tenere presente che per compilare le tabelline dei cartelloni abbiamo scelto di eseguire per prima, nella composizione di due simmetrie, la simmetria scritta a sinistra e che una rotazione è stata sempre considerata con verso orario come positivo).

Non ci sono però solo figure limitate, come quelle considerate fin qui, ma possiamo considerare anche, aiutandoci con la nostra fantasia, figure senza fine o *illimitate* (è preferibile non usare il termine infinito, che potrebbe ingenerare confusione, nel senso che un quadrato è fatto da infiniti punti e quindi è un insieme infinito di punti, ma è una figura limitata! Per figura *limitata* intendiamo che può essere racchiusa in un cerchio).

Tra le figure senza fine consideriamo le *cornicette* e le *tappezzerie* (nello spazio potremmo anche parlare dei CRISTALLI!) : VEDERE I CARTELLONI DELLA MOSTRA SUL TEMA.

Quali sono le simmetrie di una figura come una cornicetta? Esistono solo 7 tipi diversi di simmetrie per una cornicetta (VEDERE I CARTELLONI DELLA MOSTRA SUL TEMA), nel senso che qualunque cornicetta disegnata ha un insieme di simmetrie che compare tra i 7 insiemi di simmetrie raffigurati sul cartellone. È importante osservare che tra le simmetrie delle cornicette abbiamo sempre traslazioni, anzi infinite traslazioni, proprio per come sono costruite le cornicette. Ciò non può succedere per una figura limitata.

Consideriamo ora le tappezzerie: possiamo costruire tappezzerie usando le nostre scatole di specchi! Oppure con i puzzle magnetici in dotazione. Altrimenti è difficile costruire tappezzerie a mano!

Anche le tappezzerie, come le cornicette, hanno per loro costruzione infinite traslazioni come simmetrie.

Possiamo cercare gli assi di simmetria delle tappezzerie della mostra, tracciandoli con la matita ed il righello, per poi scoprire che si intersecano formando triangoli uguali a quelli formati dagli specchi delle scatole! Ecco perché le scatole di specchi generano proprio quelle tappezzerie!

Possiamo anche cercare i centri di rotazione delle stesse tappezzerie e ci accorgiamo che li troviamo nei vertici dei triangoli (ricordiamo che la composizione di due riflessioni con assi incidenti genera una rotazione!). Nella tappezzeria ci sono infiniti triangoli formati dagli assi di simmetria e quindi infiniti vertici ed infiniti centri di rotazione! Possiamo poi cercare traslazioni che conservano la tappezzeria.

È possibile provare a "calcolare" il risultato della composizione di due simmetrie di una cornicetta o di una tappezzeria? Per esempio di due rotazioni (= rotazione o traslazione), o di una rotazione e di una traslazione (= rotazione), o di due traslazioni (= traslazione), ecc..

E LO SPAZIO?

Nello spazio vi sono 6 tipi diversi di movimenti dei suoi punti che non cambiano la forma e le dimensioni delle figure, detti anche in questo caso *isometrie*, due in più rispetto al piano; infatti oltre a *traslazioni*, *rotazioni*, *riflessioni rispetto ad un PIANO* e *riflessioni con scorrimento* (lungo una direzione parallela al piano di riflessione) abbiamo anche le composizioni di una rotazione e di una traslazione (rispetto ad una direzione parallela all'asse di rotazione), dette *rotazioni con scorrimento*, e le composizioni di una rotazione e di una riflessione (rispetto ad un piano perpendicolare all'asse di rotazione), dette *riflessioni rotatorie*.

Le rotazioni con scorrimento sono per esempio simmetrie di un'elica!

VEDERE I CARTELLONI DELLA MOSTRA SUL TEMA.

Attenzione: una rotazione nello spazio avviene sempre rispetto ad un asse di rotazione, cioè in una rotazione dello spazio esiste sempre una retta ed una sola i cui punti non vengono mossi dalla rotazione. Non si può parlare quindi nello spazio di rotazione rispetto ad un punto, ma sempre di rotazione rispetto ad una retta.

Consiglio generale: sarebbe importante familiarizzare con l'uso di software per il disegno, anche solo il programma di disegno di WORD, che è sufficiente per fare delle belle cornicette ed anche tappezzerie e tanti altri bei disegni, scritte, ecc..

ATTIVITÀ VARIE

- Scrivere il proprio nome allo specchio (in stampatello maiuscolo): ricordare che ripetendo due volte la stessa riflessione (o ribaltamento) otteniamo l'identità, quindi per scrivere correttamente il proprio nome allo specchio basta prima scriverlo normalmente e poi copiare quello che si vede allo specchio! Il nome può essere scritto prima lungo una direzione parallela allo specchio, poi, esercizio più difficile, lungo una direzione perpendicolare. In questo caso occorre pensare non solo più alla simmetria delle singole lettere, ma anche a quella delle parole. Il trucco suggerito funziona comunque sempre!
- Potrebbe essere interessante provare a leggere qualche frase scritta "alla Leonardo"? O scriverla?
- Utilizzare lo specchio singolo per scoprire gli assi di simmetria di una figura.
- Con gli specchi incidenti è possibile costruire ROSONI di tanti tipi diversi. Ed è possibile anche sperimentare, come già detto, che la composizione di due riflessioni con assi incidenti dà una rotazione. Attenzione: proprio per tale motivo, quando si vuole ottenere con gli specchi incidenti un rosone formato da fette tutte uguali, è necessario che l'angolo formato dagli specchi sia un sottomultiplo intero di 180° e non solo di 360°: ossia 36° va bene, ma 72° no, perchè 72 divide esattamente 360, ma non divide esattamente 180. Occorre cioè che l'ampiezza del nostro angolo divida l'angolo giro in un numero pari di fette: 360:36=10 pari, ma 360:72=5 dispari!

  Affinché infatti l'oggetto posto tra gli specchi (la fetta reale) si ripeta correttamente in tondo lungo la torta, riflessione dopo riflessione, formando un rosone con fette tutte uguali, occorre che, dopo un giro, la fetta che precede la fetta tra gli specchi sia la sua immagine riflessa, ma questo non può succedere se il risultato della divisione dell'angolo giro per l'ampiezza della fetta reale dà un numero dispari poiché ciò significa aver generato un numero pari di immagini virtuali. Dopo un giro ci ritroveremmo quindi ad aver effettuato un numero pari di riflessioni, producendo come ultima fetta virtuale una copia virtuale dell'oggetto stesso e non la sua immagine riflessa. Ovviamente ciò con gli specchi non può succedere, poiché in entrambi gli specchi si forma come prima fetta l'immagine riflessa dell'oggetto, ma che le cose non funzionano correttamente si può verificare dal fatto che se guardiamo la metà della torta opposta a quella che sta dalla parte da cui osserviamo, possiamo notare una fetta composta dalla sovrapposizione di una copia virtuale dell'oggetto con la sua immagine riflessa. Insomma affinché tutto funzioni occorre che non sia solo la fetta reale a ripetersi un numero intero di volte, ma la coppia formata dalla fetta reale e dalla sua immagine riflessa e quindi occorre che non solo l'ampiezza della fetta reale divida l'angolo giro esattamente, ma anche il suo doppio.

Comunque se l'oggetto inserito tra gli specchi presenta una simmetria rispetto alla bisettrice dell'angolo formato dagli specchi, è sufficiente che l'angolo divida esattamente 360°, poiché in questo caso è la stessa simmetria che provvede a "rendere l'oggetto come il doppio della sua metà"! Riassumendo: per costruire un rosone con gli specchi incidenti, se l'oggetto posto tra gli specchi presenta una simmetria assiale di asse la bisettrice dell'angolo formato dagli specchi, possiamo utilizzare qualunque angolo che divide la torta in un numero intero di parti; se invece l'oggetto non presenta una tale simmetria occorre utilizzare angoli che dividono la torta in un numero pari di fette. Nel primo caso si otterrà un rosone formato da tante fette uguali quante sono le volte che la fetta reale generatrice sta nell'angolo giro, nel secondo caso invece si otterrà un rosone formato da un numero di fette pari alla metà, poiché la fetta che genera per rotazione il rosone è ora di ampiezza doppia di quella reale che lo genera mediante riflessioni.

- Misurare gli angoli con gli specchi incidenti e misurare gli angoli delle scatole, contando quante volte l'immagine di un oggetto viene riflessa attorno al vertice, se si tratta di un numero intero. Misurare gli angoli in termini di parti dell'angolo giro e del mezzo giro! Ed anche in gradi…riflettendo per esempio su quante volte 45 sta in 360…(A proposito di angoli, potrebbe essere interessante un aggancio all'uso delle coordinate polari nel piano e sferiche nello spazio…insomma longitudine e latitudine! Siamo anche fortunati che Torino si trova ad una latitudine di 45°, o meglio, di un ottavo di angolo giro o di un quarto di angolo piatto o ancora di metà di angolo retto!)

- Calcolare l'angolo esterno di un poligono regolare facendo una "passeggiata" attorno al poligono (per esempio la scatola con la forma di triangolo equilatero) ed accorgendosi che al termine della passeggiata, ritrovandosi nella stessa direzione in cui siamo partiti, abbiamo fatto un (solo) giro su noi stessi. Avendo ogni volta fatto una svolta pari all'angolo esterno del poligono, per ottenere tale angolo sarà allora sufficiente dividere 360° (o l'angolo giro) per il numero dei vertici o dei lati del poligono regolare (il numero di svolte che abbiamo compiuto nella nostra passeggiata). Conoscendo poi l'angolo esterno si trova l'angolo interno come 180° meno l'angolo esterno. (Potrebbe essere interessante costruire angoli anche piegando la carta?)

NELLO SPAZIO

- Verificare la formula di Eulero per i poliedri (e per i grafi nel piano!): V+F-S=2, dove V è il numero di vertici, F quello delle facce e S quello degli spigoli.
- Verificare la dualità tra poliedri regolari: congiungendo i centri delle facce che hanno uno spigolo in comune si ottiene il *poliedro duale* del poliedro dato. Dal Tetraedro regolare si ottiene ancora un Tetraedro regolare, pertanto il Tetraedro viene detto *autoduale*. Dal Cubo (Esaedro regolare) si ottiene l'Ottaedro regolare e viceversa, pertanto Cubo e Ottaedro regolare sono *duali* l'uno dell'altro. Dal Dodecaedro regolare si ottiene l'Icosaedro regolare e viceversa, pertanto Dodecaedro e Icosaedro regolari sono *duali* l'uno dell'altro.
- Trovare alcune simmetrie di poliedri regolari: VEDERE I CARTELLONI DELLA MOSTRA SUL TEMA
- Osservare come è possibile generare cilindri facendo ruotare una retta attorno ad un asse parallelo ad essa, oppure coni facendo ruotare una retta attorno ad un asse incidente.

Cilindri e coni hanno simmetrie interessanti! Ma cosa succede se facciamo ruotare una retta attorno ad un asse SGHEMBO rispetto ad essa? Ricordiamo che due rette sono *sghembe* se non sono parallele e non sono incidenti, oppure, in modo equivalente, se non stanno in uno stesso piano, come due spigoli non paralleli di una stanza che non stiano su una stessa parete, né entrambi sul soffitto, né entrambi sul pavimento. Nel problema che ci interessa in cui una retta gira intorno all'altra, escludiamo il caso in cui le due rette sghembe siano perpendicolari, poiché la superficie generata dalla rotazione sarebbe semplicemente un piano ortogonale all'asse di rotazione.

Prendiamo allora un cubo e facciamo ruotare il cubo attorno ad una sua diagonale (appoggiandolo quindi su un vertice e facendolo ruotare tenendolo per il vertice opposto)…ecco che compare ai nostri occhi nella zona centrale una superficie curva, molto diversa da un cilindro o da un cono. Si tratta nientemeno che di una superficie nuova detta *iperboloide rigato*, perché fatto di rette. In realtà le rette dell'iperboloide rigato sono doppie, nel senso che per ogni suo punto ne passano due. Forse qualcuno avrà visto cestini di bacchette di vimini con tale forma (esistono anche reti da pesca con la stessa forma, perché fatte sempre di canne diritte), il fatto che per ogni punto dell'iperboloide passano due rette permette infatti di ottenere questa superficie intrecciando bacchette di vimini! Anche le torri di raffreddamento delle centrali nucleari hanno tale forma, perché sono fatte col cemento armato. È il castello interno di tondini di ferro intrecciati (in questo caso in realtà saldati tra loro), proprio come in un iperboloide rigato, che tiene in piedi il cemento e gli dà quella forma particolare. Si tratta anche di una struttura estremamente resistente!

Giorgio Ferrarese
Dipartimento di Matematica
Università di Torino
Via Carlo Alberto 10
10123 Torino

Tel: **011 6702908**

e-mail: **giorgio.ferrarese@unito.it**

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/ferrarese/index.htm